Limita posloupnosti - komplexní úloha XIV

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]},$$

kde $[\cdot]$ značí funkci nazývanou celá část. Ta je pro všechna reálná čísla definována tak, že $[x]$ je rovno nejvyššímu celému číslu, které je menší nebo rovno x.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n}}{\frac{n+1}{2}\cdot n\sqrt{n}} \leq \text{zadaná limita} \leq \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^{n+1}\cdot 2}}{\frac{n+1}{2}\cdot n\sqrt{n} - n}$$

(A) (B)

užíváme $a \geq [a] > a-1$

(A) $\sqrt[n]{(n+1)^n} = n+1$, dostáváme $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{n+1}{n+1} \cdot 2 = 2$

(B) $\sqrt[n]{(n+1)^{n+1}\cdot 2} = \sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{(n+1)^n}$

člen $-n$ můžeme uměle navýšit na $n\sqrt{n}$, čímž dostaneme
– odhad neporušíme, neboť jmenovatel dále zmenšíme

$\sqrt[n]{2} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{n+1}{\cancel{n+3}\; n-1} \cdot \sqrt[n]{n+1} \cdot 2 \xrightarrow{\text{VOAL}} \underline{2}$

Podle VO2P tedy i zadaná limita $= 2$