Limita posloupnosti - komplexní úloha X

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}.$$

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}} .$$

Pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$ platí $\sin x \in [-1,1]$; $\cos x \in [-1,1]$, Odhadneme:

$$\sqrt[n]{\frac{4^n-3^n}{5^n+4^n}} \le \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}} \le \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n}{5^n-4^n}}$$

pro $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{\frac{4^n-3^n}{5^n+4^n}} = \frac{4}{5}\cdot\sqrt[n]{\frac{20^n-15^n}{20^n+16^n}} .$$

Od určitého n_0 platí odhad $15^n \le \frac{1}{2}20^n$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}20^n}{15^n} = \frac{1}{2}\lim\left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty$, Obdobně platí odhad $16^n \le \frac{1}{2}20^n$. $\quad \frac{1}{2}\lim\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

Tedy pro $\forall\, n > n_0$:

$$\sqrt[n]{\frac{20^n-\frac{1}{2}20^n}{20^n+\frac{1}{2}20^n}} \le \sqrt[n]{\frac{20^n-15^n}{20^n+16^n}} \le \sqrt[n]{\frac{20^n}{20^n}}$$

Dále $\sqrt[n]{\frac{20^n-\frac{1}{2}20^n}{20^n+\frac{1}{2}20^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, stejně tak $\sqrt[n]{\frac{20^n}{20^n}} = \sqrt[n]{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$,

proto podle VO2P $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{20^n-15^n}{20^n+16^n}} = 1$.

spodní odhad pro $\sqrt[n]{\frac{4^n+3^n}{5^n-4^n}}$ bude $\sqrt[n]{\frac{20^n}{20^n}}$, horní bude $\sqrt[n]{\frac{20^n+15^n}{20^n-16^n}}$

(po vytknutí $\frac{4}{5}$), tedy podle VOAL

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n-3^n}{5^n+4^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n+3^n}{5^n+4^n}} = \frac{4}{5}\cdot 1$$, proto podruhé podle VO2P

hledaná limita je $\underline{\underline{\frac{4}{5}}}$.