Limita posloupnosti - komplexní úloha VIII

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} [\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n],$$

kde $[\cdot]$ značí funkci nazývanou celá část definovanou pro všechna reálná čísla tak, že $[x]$ je nejvyšší celé číslo menší nebo rovné x. Například $[2] = 2$, $[-1] = -1$, $[1{,}3] = 1$, $[1{,}7] = 1$ a $[-1{,}3] = -2$ (protože -2 je nejvyšší celé číslo *menší* než $-1{,}3$).

Řešení

$$a_n = \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\right]$$

$$A^4 - B^4 = (A-B)\cdot(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$$

$$a_n = \left[\frac{\left(\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3} + \sqrt[4]{(n^4+4n^3)^2}(-n) + \dots\right.}{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3} + \sqrt[4]{(n^4+4n^3)^2}\cdot(+n) + \sqrt[4]{n^4+4n^3}\cdot n^2 +}\right.$$

$$\frac{\sqrt[4]{n^4+4n^3}\cdot n - n^3}{+(+n^3)} =$$

$$= \frac{\cancel{n^4} + 4n^3 - \cancel{n^4}}{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3} + \sqrt[4]{(n^4+4n^2)^2}\cdot n + \sqrt[4]{n^4+4n^3}\cdot n^2 + n^3} =$$

$$= \frac{4\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3}}{n^3} + \frac{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^2}}{n^2} + \frac{\sqrt[4]{n^4+4n^3}}{n} + 1\right)} =$$

$$= \frac{4}{\left(\sqrt[4]{\frac{n^4}{\cancel{n^4}} + \frac{4n^3}{n^{12}}}\right)^3 + \sqrt[4]{\left(\frac{n^4}{\cancel{n^4}} + \frac{4n^2}{n^8}\right)}^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{n^4+4n^3}{n^4}\right)} + 1} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt[4]{\left(\cancel{\frac{1}{n^8} + \frac{4}{n^9}}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(\cancel{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^6}}\right)^2} + \sqrt[4]{1 + \frac{4}{n}} + 1}$$

$$\left(1 + \frac{4}{n}\right)^3 \qquad \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2$$