Limita posloupnosti - komplexní úloha IX

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n^3+1}] + [\sqrt{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+n^n}},$$

kde $[\cdot]$ značí funkci nazývanou celá část, tj. $[x]$ je rovno nejvyššímu celému číslu menšímu nebo rovnému x.

Řešení

z vlastností celé části

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}-2}{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}} \le \text{zadaná limita}$$

Spočtěme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}$: platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}{n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n+\dots+1^n}$, což odhadneme

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\tfrac{1}{n}\right)^n+\dots+1} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n+\dots+1^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Podle VoZP tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}{n} = 1$.

Dále spočtěme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}{n} \overset{AL}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-1}}{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3+1}{n^2}} + \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3-1}{n^2}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\frac{1}{n^2}}}_{=\infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n-\frac{1}{n^2}}}_{=\infty}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}} \overset{AL}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}{n}}{\frac{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}{n}} \overset{AL}{=} \infty.$$

Dále $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2}{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{-2}{n}}{\frac{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}{n}} \overset{AL}{=} \dfrac{0}{1} = 0$

Podle VoAL je zadaná limita ~~rovna~~ větší než $\infty - 0 = \underline{\underline{\infty}}$

a tedy také $= \underline{\underline{\infty}}$