Limita posloupnosti - komplexní úloha IV

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \, \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} \, .$$

Řešení

$$a_{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} \cdot \frac{(2n)^3 \cdot \sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3 + \sqrt[4n]{2n}} \overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \lim \frac{8\cancel{n^3} \cdot \sqrt[2n]{2n}}{\cancel{n^3} \cdot \left(8 + \frac{\sqrt[4n]{2n}}{n^3}\right)}$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{\lim 8 \cdot \lim \sqrt[2n]{2n}}{\lim 8 + \frac{\lim \sqrt[2]{\sqrt[2n]{2n}}}{\lim n^3}} = \frac{8 \cdot 1}{8 + \frac{1}{\infty}} = 1$$

věta o limitě odmocniny

$$\lim \sqrt[2]{\sqrt[2n]{2n}} = \sqrt[2]{\lim \sqrt[2n]{2n}} = \sqrt[2]{1} = 1 \quad \Big| \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

↳ vybraná posloupnost

$$a_{2n+1} \Rightarrow \lim (-1)^{2n+1} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)^3} \cdot \sqrt[2n+1]{2n+1}}{\cancel{(2n+1)^3} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt[4n+2]{2n+1}}{(2n+1)^3}\right)} \overset{VOAL}{=} -1 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)} = -1$$

$$\lim \sqrt[4n+2]{2n+1} = \lim \sqrt[2]{\sqrt[2n+1]{2n+1}} = \sqrt[2]{\lim \sqrt[2n+1]{2n+1}} = 1$$

limita neexistuje, neboť vybraná posl. $a_{2n} \to 1$, $a_{2n+1} \to -1$, což je spor s větou o limitě vybr. posl. a jednoznačnosti limity