Limita posloupnosti - komplexní úloha III

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2+\sin(n+1)\right)\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right). \cdot \frac{\left(\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}\right)}{\left(\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}\right)}$$

Řešení

$$\cancel{= \lim_{n\to\infty}\left(n^2+\sin(n+1)\right)\cdot n^2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right) =}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+\sin(n+1)\right)\cdot\left(n^4+2-n^4-1\right)}{\left(\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}\right)} =$$

netřeba, stačí to pouze vytknout

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+\sin(n+1)\right)\cdot 1}{n^2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)} \overset{VOAL}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)} = 1\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)} \overset{VOAL}{=}$$

Věta o mizející a omezené posloupnosti: $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$, kde a_n je mizející, b_n je omezená

$\frac{1}{n^2}$ je mizející, protože:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$0 \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} \geq 0$$

tedy $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \sin(n+1)$

$\sin(n+1)$ je omezená, neboť $\sup \sin(n+1) = 1$, $\inf \sin(n+1) = -1$.

a $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$, tedy:

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\sin(n+1)\cdot\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+0}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

? zbytečně sofistikované stačí $-1 \leq \sin n+1 \leq 1$

VĚTA O DVOU POLICAJTECH.

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \geq \sqrt{1+\frac{1}{n^3}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \overset{\lim}{\geq} \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \overset{\lim}{\geq} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$\Longrightarrow 1 \geq \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} \geq \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \geq 1$$

plyne z věty o limitě odmocniny