Limita posloupnosti - komplexní úloha I

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}.$$

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot2^n}-\sqrt{3^n+2^n}\cdot\frac{\sqrt{3^n+2\cdot2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+2\cdot2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}}=$$

$$=\lim\sqrt[n]{\frac{3^n+2\cdot2^n-3^n-2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}}=\lim\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{2\cdot2^n}{3^n}}+\sqrt{1+\frac{2^n}{3^n}}\right)}}=$$

$$\overset{VOAL}{=}\lim\sqrt[n]{\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^n}\cdot\lim\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1+2\cdot\left(\frac23\right)^n}+\sqrt{1+\left(\frac23\right)^n}}}=$$

Věta: Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy, splňující podmínku

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=A.\ \text{Pak}\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a_n}=A$$

$$\lim\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+2\cdot\left(\frac23\right)^{n+1}}+\sqrt{1+\left(\frac23\right)^{n+1}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+2\cdot\left(\frac23\right)^n}+\sqrt{1+\left(\frac23\right)^n}}}\overset{VOAL}{=}\frac{\dfrac{1}{\sqrt1+\sqrt1}}{\dfrac{1}{\sqrt1+\sqrt1}}=1$$

Věta o limitě odmocniny (pod odmocninou kladné členy)

$$=\lim\frac{2}{\sqrt3}\cdot\lim 1=\underline{\underline{\frac{2}{\sqrt3}}}$$