6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Najděte lim sup a lim inf posloupností

(a)

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Řešení: Protože posloupnost je konvergentní, platí, že

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n = 1.$$

(b)

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

Řešení: Posloupnost není konvergentní. Je ale lehké ukázat, že má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = (2 + \frac{3}{n})$ a $x_{2n+1} = -(2 + \frac{3}{n})$. Proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = -2.$$

(c)

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Řešení: Je lehké ukázat, že posloupnost má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = \frac{1}{n} + 1$ a $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Proto

$$\limsup x_n = 1, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(d)

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Řešení: Protože $\cos\frac{n\pi}{2}$ nabývá popořadě hodnot $0, -1, 0, 1$, jsou nenulové pouze sudé členy posloupnosti. Ty jsou rovny

$$x_{2n} = 1 - \frac{2n}{2n+1} \to 0, \qquad x_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1} \to 2.$$

Liché členy posloupnosti jsou nulové. Hromadné body posloupnosti jsou tedy nula a dva, proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(e)
$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Řešení: Člen $n(n-1)/2$ je sudý pro $n = 4k$ a $n = 4k+1$, naopak pro $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$ je lichý. Posloupnost x_n tedy tvoří čtyři konstantní podposloupnosti:

$$x_{4n} = 1{+}2{+}3 = 6, \quad x_{4n+1} = 1{-}2{+}3 = 2, \quad x_{4n+2} = 1{+}2{-}3 = 0, \quad x_{4n+3} = 1{-}2{-}3 = -4.$$

Z toho plyne, že $\limsup x_n = \sup x_n = 6$ a $\liminf x_n = \inf x_n = -4$.

(f)
$$x_n = (-1)^n n$$

Řešení: Podposloupnosti $x_{2n} = 2n$ a $x_{2n+1} = -2n-1$ rostou do $+\infty$, resp. klesají do $-\infty$. Tím je vše jasné a je

$$\limsup x_n = \sup x_n = +\infty, \qquad \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(g)
$$x_n = -n[2 + (-1)^n]$$

Řešení: Posloupnost je konvergentní, protože $-n[2+(-1)^n] \leq -n \to -\infty$. Proto
$$\limsup x_n = \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

2. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

(a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$
Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost x_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\begin{aligned} \lim x_{n+1} &= \lim \sqrt{2+x_n} \\ L &= \sqrt{2+L} \\ L &= 2. \end{aligned}$$

(b)

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L, potom musí platit

$$\begin{aligned} \lim x_{n+1} &= \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \\ L &= \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy minus jednička nepřichází v úvahu.

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(c) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a vše je jasné. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$x_{n+1} = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) = \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}.$$

Přitom evidentně $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.
Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

3. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} \\
&\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= e \cdot e \cdot e = e^3
\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}$$

U druhého rovnítka jsme použili větu o mocnině a limitě. U poslední rovnosti jsme užili limitu vybrané posloupnosti, neb posloupnost a_{2n} musí mít stejnou limitu jako a_n, což známe a víme, že jde k e.

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1} \overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = \frac{e^2}{1}$$

Poslední rovnost upravíme podobně jako příklad předchozí a vyjde e^2.

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right)^{-1}$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{1}{e}$$

Úvahy o větách viz výše.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Řešení:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt n tak, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

Zároveň zjevně

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

n-tá odmocnina tuto nerovnost nepokazí (promyslete) a tak můžeme odhadovat

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \lim_{n\to\infty} \leq \sqrt[n]{10} = 1,$$

takže z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$