6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 3 (O vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$, $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (maximum a minimum se uvažuje v $\mathbb{R}^*$).

Věta 4 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Příklady

1. Najděte lim sup a lim inf posloupností

   (a)
   $$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

   (b)
   $$x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

(c)
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

(d)
$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

(e)
$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(f)
$$x_n = (-1)^n n$$

(g)
$$x_n = -n[2+(-1)^n]$$

2. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

(a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

(b)
$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(c) Nechť $0 \le a \le 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy
$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

3. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$