5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy, splňující podmínku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Nebude-li tvrzení dokázáno na přednášce, musíte jej být schopni dokázat sami.

Věta 2. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Důkaz nepřímo vyplyne v kapitole o řadách.

Věta 3. Pokud q je racionální číslo a $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (a je vlastní), potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n^q = (\lim_{n\to\infty} a_n)^q.$$

Pokud q je kladné racionální číslo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n \geq 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n^q = 0.$$

Definice 4. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ neboli, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Věta 5 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 6 (O limitě a uspořádání)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

(a) Jestliže $A < B$, potom

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : \ a_n < b_n.$$

(b) Jestliže

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : \; a_n \geq b_n,$$

pak $A \geq B$.

Věta 7 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq \; b_n,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Fakta

1. (a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

   (b) pro $a > 1$ je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

   (c) Pro $\beta > 0$ a $a > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

   (d) Pro $\alpha > 0$ (tj. libovolně velké) a pro $\beta > 0$ (tj. libovolně malé)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0.$$

2. Nechť $a > 0$.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

   (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Příklady

1. Spočtěte limitu

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

   (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$

2. (a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

(b)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

(e) $a, b, c > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$$

pro $a > b > 0$

(g)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$$

3. Dokažte fakta (1)(a-c) a (2)(a-d)