4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a) Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \quad \inf = 1 \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$(0;2] \quad \inf = 0 \quad \sup = 2$$

$$(0;1) \cap \mathbb{Q} \quad \inf = 0 \quad \sup = 1$$

$$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\} \quad \inf = -2 \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\} \quad \inf \text{neexistuje} \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\} \quad \inf = -\pi/2 \quad \sup = \pi/2$$

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n\frac{\pi}{4})$$

Řešení: Najdeme vybrané podposloupnosti s různými limitami. Kupříkladu pro n dělitelná 8 získáme $\sin(2\pi) = 0$, zatímco pro n, která mají po dělení 8 zbytek 2 získáme $\sin(1/2\pi) = 1$. Takže máme 2 různé podposloupnosti s různými, dosti vzdálenými limitami. Stačí použít Větu o limitě vybrané posloupnosti. Jiný způsob je použít Bolzano–Cauchyho podmínku: zvolíme $\epsilon < 1$ a najdeme protipříkladová n_0 pomocí úvahy výše.

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

Řešení: Jednak když se podíváme na úlohu, můžeme zkusit odhadnout limitu. Odmocnina zmenšuje rozdíly, takže můžeme doufat, že rozdíl se bude zmenšovat a limita půjde k nule. A teď formálně - rozšíříme vhodným zlomkem tak, abychom se zbavili odmocnin:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \frac{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{n^{2/3}} \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0} + 1} = 0$$

Uvědomíme si, že jsme použili Větu o aritmetice limit.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Řešení: Nejprve se soustředíme na sudé členy a zlomek rozšíříme:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

Pro liché členy spočítáme limitu úplně stejně, vyjde nám $-1/2$. Čili limita neexistuje.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$$

Budeme pracovat se zlomkem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

Ten rozšíříme, aby nám zmizela šestá odmocnina. Měla by vyjít 0.

(e)

$$\lim_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$

Řešení: Rozdělíme opět na sudé a liché členy:

$$\lim_{n\to\infty} 3(1 + \frac{1}{n}) + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\lim_{n\to\infty} 3(1 + \frac{1}{n}) - 2 = 3 - 2 = 1$$

Čili opět máme dvě různé limity, ale jedna posloupnost nemůže mít 2 limity. Tedy limita neexistuje.

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Rozšíříme jmenovatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$ odstranili odmocninu ve jmenovateli. Rozšíříme čitatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$ odstranili odmocninu v čitateli. Vzniklé odmocniny se již nebudou odečítat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{6} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} = 1 \cdot \frac{1+1+1}{1+1+1} = 1.$$

(Uvědomte si, že čitatel i jmenovatel mají největší mocninu $n^{4/3}$, mají tři sčítance a ve všech je u koeficientu $n^{4/3}$ jednička. Anebo poctivě vytkněte $n^{4/3}$ v čitateli i jmenovateli a proveďte limity – dostanete tři jedničky v čitateli i jmenovateli.)

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$$

Řešení: Goniometrické funkce jsou omezené, a tedy nezajímavé. Nejvíce rostoucí člen je v čitateli i jmenovateli n^2, vytkneme jej tedy:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{2 + 2/n + (\sin 2n)/n}{(\cos 3n)/n + (2 + (\sin 4n)/n)^2}$$
$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{2+0+0}{0+2^2} = \frac{1}{2}.$$

Limity typu $\frac{\sin \text{cokoliv}}{n}$, $\frac{\cos \text{cokoliv}}{n}$ konvergují k nule podle věty "omezená posloupnost krát nula".

3. Pro jaké posloupnosti (a_n) existuje $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n a_n$?

Řešení: Pokud je $a_n \geq 0$, pak limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.

Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule (jednoduchý důsledek věty o dvou policajtech).

Jestliže $\lim a_n \neq 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n > n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, je $a_n > \varepsilon$. Potom ale $|a_n - a_{n+1}| > 2\varepsilon$ a není tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci posloupnosti.

2. Pokud a_n střídá znaménka, pak rozlišíme dva případy.

a) $\lim a_n = 0$. Potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ ze stejného důvodu jako výše.

b) $\lim a_n \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n > n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, je $|a_n| > \varepsilon$. Protože limitou nemůže být podle předpokladů nula, pak, má-li posloupnost $(-1)^n a_n$ limitu mít, musí od nějakého indexu n_1 (předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $n_1 > n_0$) přestat střídat znaménka. Z toho plyne, že od indexu n_1 lze psát $a_n = (-1)^n b_n$, kde posloupnost b_n od indexu n_1 je stále kladná nebo záporná. Potom $\lim(-1)^n a_n$ existuje právě tehdy, pokud existuje $\lim b_n$ (z podobného důvodu jako v 1. části příkladu).