3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *Posloupností reálných čísel* nazýváme jakékoli zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$. Pro každé konkrétní $n \in \mathbb{N}$ nazýváme reálné číslo a_n *n-tým členem* posloupnosti $\{a_n\}$.

Definice 2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathcal{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathcal{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Věta 3 (Aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathcal{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathcal{R}$. Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Věta 4 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathcal{N} \quad \forall n \in \mathcal{N},\ n \geq n_0: \ a_n \leq c_n \leq\ b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathcal{R}$.

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 5 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Hinty

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Příklady

1. Z definice určete

   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} \log n$$

2. Spočítejte limity

   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+2n-7}{n^5-6n^2+4}$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-5}{n^3+8}$$

   (c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1}$$

   (d)
$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\}$$

   (e)
$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\}$$

   (f)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$$

   (g)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}, \quad \text{kde} |a|,|b|<1$$

   (h)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

   (i)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

   (j)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$