3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Z definice určete

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   Řešení: chceme dokázat, že: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.
   Jelikož $n > 0$, můžeme absolutní hodnotu přepsat na: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, což znamená, že potřebujeme zajistit, aby $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Tedy stačí zvolit $n_0 := [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$ (horní celá část), pak $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy pro $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ platí, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} \log n$$

   Řešení: Ze znalostí základních funkcí odhadneme, že limita bude asi ∞. Takže užijeme definici nevlastní limity:

   Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže platí:
   $$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \geq k$$
   (resp.
   $$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \leq k).$$

   Tedy zvolme $k \in \mathbb{R}$ a hledejme n_0, aby pro $\forall n \geq n_0$ byla $a_n \geq k$. Logaritmus je rostoucí záležitost, stačí tedy najít vhodné n_0, zbytek bude platit triviálně. Dosadíme-li n_0 do předpisu, získáme:
   $$\ln n_0 \geq k.$$
   Vypustíme na to exponencielu, která je taktéž rostoucí funkcí, tedy nezmění znaménko nerovnosti:
   $$n_0 \geq e^k.$$
   Nyní už jsme hotovi, stačí volit $n_0 := [e^k] + 1$ a z předchozích úvah plyne vše potřebné.

2. Spočtěte

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$$

Řešení: Užijeme opakovaně větu o aritmetice limit, promyslete si, kde přesně.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+2n-7}{n^5-6n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(2+\frac{2}{n^4}-\frac{7}{n^5})}{n^5(1-\frac{6}{n^3}+\frac{4}{n^5})} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n^4}-\frac{7}{n^5})}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{6}{n^3}+\frac{4}{n^5})} =$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^4} - \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^5}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3} + \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^5}} = \frac{2+0-0}{1-0+0} = 2$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-5}{n^3+8}$$

Řešení: Opět věta o aritmetice limit, ale už to nebudeme rozepisovat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-5}{n^3+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{8}{n^3}\right)} = \frac{0+0-0}{1+0} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1}$$

Řešení: Funkce sinus je omezená, tedy:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(-1)\cdot\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{n+2}-\frac{n}{2}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-n)}{2(n+2)}\right\} = -\frac{1}{2}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{1}$$
$$=(1+0)(2+0) = 2.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$$

Řešení: Roznásobíme závorky podle binomické věty a nebudeme se zbytečně trápit s malými mocninami:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{100}+100\cdot 4n^{99}+\cdots)(n^{100}+100\cdot 3n^{99}+\cdots)}{(n^{100}+100\cdot 2n^{99}+\cdots)-n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{99}(\cdots)}{2n^{99}(\cdots)} = \frac{1}{2}$$

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}, \quad \text{kde}|a|,|b|<1$$

Řešení: Stačí si uvědomit, jaký je součet geometrické řady a věta o aritmetice limit...: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Limita vyjde: $\frac{1-b}{1-a}$

(h)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Řešení: Použijeme trik:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

. Nyní aplikováno na limitu získáme:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Ocásek sumy je maličký (jde k nule), a všechny členy kromě jedničky se sežerou... Tedy výsledek je roven 1.

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Použijeme opět trik:

$$1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Když si nyní limitu rozepíšeme, začnou se nám závorky navzájem krátit s jmenovateli a zbyde nám 1/2 a malý zbytek. Tedy limita je rovna 1/2.

(j)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

Řešení: Řešíme na základě znalosti nerovnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

což jde k nule. Zespoda je limita také omezená, vše je kladné. Čili celkem je rovna 0.