(1) (a)

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(a) pro $n = 0$

$$0 = \frac{0 \cdot 1}{2} \checkmark$$

pro $n = 1$ // pro jistotu

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$$

(b) předpokládáme platnost pro n

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) chceme: $$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \overset{?}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k + n+1 = \quad - n -$$

$$\frac{1}{2} n(n+1) + n+1 =$$

$$\frac{1}{2}\left[n(n+1) + 2n + 2\right] =$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(1) (b)

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) pro $n = 1$

$$1^2 = \frac{1(2)(2+3)}{6} = 1$$

(b) nechť výrok platí pro n

$$1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) dokážeme pro $n+1$

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} + (n+1)^2 \overset{?}{=} (n+1)(n+2)(2n+3) \cdot \frac{1}{6}$$

$$(n+1)(n+1) + \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) =$$

$$(n+1) \left[(n+1 + \frac{1}{6} n (2n+1) \right] =$$

$$(n+1) \frac{1}{6} \left[6n + 6 + n(2n+1) \right] = \frac{1}{6}(n+1) \left[2n^2 + 3n + 4n + 6 \right] \checkmark$$

① (e)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

(a) pro $n = 1$

$$1^3 = 1^2$$

(b) indukční předpoklad

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

(c) krok

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1+2+\dots+n)^2 + (n+1)^3$$

$$= (\qquad\qquad)^2 + (n+1)^2 \cdot n + (n+1)^2$$

(1)(d)

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n)(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

(a) $n = 1$

$$1\cdot 2 = \frac{1}{3} 1 (2)\cdot(3) = 2$$

(b) předpoklad

$$1\cdot 2 + \cdots \; n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

(c) krok

Chci: $1\cdot 2 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

$$1\cdot 2 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$= (n+1)(n+2)\left[\frac{n}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{3}(n+3)(n+1)(n+2)$$

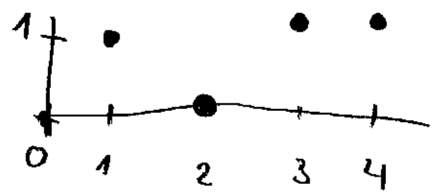
✓

(7.4)(1) Ukažte, že počet # podmnožin $\{1,\dots,n\}$ je 2^n

pro $A \subseteq \{1,\dots,n\}$

definujeme funkci $\chi_A : \{1,\dots,n\} \to \{0,1\}$

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 0 & k \notin A \\ 1 & k \in A \end{cases}$$



$A = \{1,3,4\}$

Tato funkce jednoznačně určuje podmny $\{1,\dots,n\}$.

Funkcí χ_B, $B \subseteq \{1,\dots,n\}$ je 2^n

(každému č. $\{1,\dots,n\}$ lze přiřadit hodnotu 0 nebo 1)

(Pozn. $\emptyset \subseteq \{1,\dots,n\}$, $\{1,\dots,n\} \subseteq \{1,\dots,n\}$.)

(7.4 i)(2) X konečná mna ②

$|X| = n \in \mathbb{N}$

pro $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ označme

$$\binom{X}{k} = \{ A \subseteq X, \ |A| = k \}$$

Pak platí: $$\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}$$

počet podmnožin velikosti k

= kolika způsoby lze zvolit k prvků → kombinační číslo

(7.1)(3)(b)

- $\mathbb{N}$ je spočetná
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je také spočetná

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & (1,1) \rightarrow & (1,2) \rightarrow & (1,3) \rightarrow & (1,4) \\
2 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \\
3 & (3,1) & (3,2) & & \\
4 & (4,1) & & &
\end{array}
$$

- jakákoli ∞ podmnožina $\mathbb{N}$ je také spočetná

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ A je nekonečná

Chceme ukázat, že $|A| = |\mathbb{N}|$

$A \subseteq \mathbb{N}$ tedy $|A| \leq |\mathbb{N}|$

A je nekonečná $|A| \geq |\mathbb{N}|$

tedy $|A| = |\mathbb{N}|$

nebo

vybraná podposloupnost

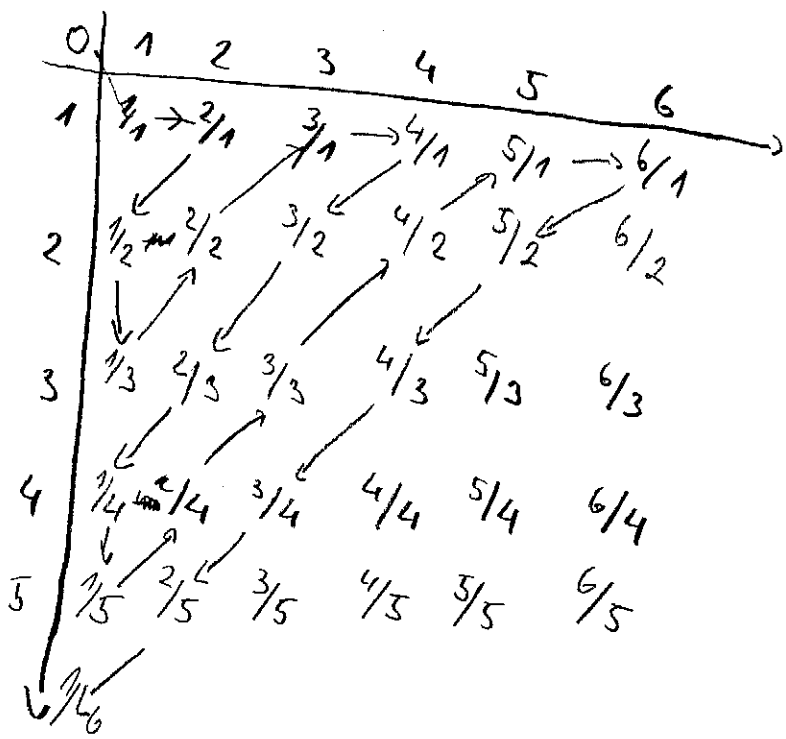
(7.4) (3c) $\mathbb{Q}$ je spočetná.

- $\mathbb{Q}$ je zjevně nekonečná ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$)
- musíme najít bijekci $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

tu sestrojíme dle obrázku:

$\mathbb{Q}$ čísla strčíme do tabulky a najednou ~~…~~ takto:

$0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ -\frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},$ atd.



jejich pořadí v tomto "hadovi" pak dává kýženou bijekci

- exp(ℕ)

  $|\exp \mathbb{N}| \geq |\mathbb{N}|$

  z Cantorovy věty: $|\exp \mathbb{N}| > |\mathbb{N}|$, nelze najít bijekci

  $\Rightarrow$ exp(ℕ) je nespočetná

- ℝ není spočetná

  zapsané v 3 soustavě

  uvažujme interval (0, 1) a jeho prvky sestávající z 0 a 1. Ty také musí být spočetné

  -> seřadíme je

$$
\begin{array}{ll}
a_1 & 0{,}00010\ldots \\
a_2 & 0{,}10100\ldots \\
a_3 & 0{,}11100\ldots \\
a_4 & 0{,}01011\ldots \\
a_5 & 0{,}11010\ldots
\end{array}
$$

// doplníme nulami //

nyní sestrojíme číslo y tak, že vezmeme čísla na diagonále a prohodíme 0 a 1.
(v našem případě -> 0,11001...)
Ale kde v naší posloupnosti se nachází y ?
Tedy (0, 1) je nespočetný a tedy i ℝ

- $|\mathbb{R}| = |\exp \mathbb{N}|$

(1) definujme $f: \mathbb{R} \to \exp \mathbb{Q}$

$f(x) = \{q \in \mathbb{Q},\ q \leq x\}$

f je prosté (tvrzení)

máme $|\mathbb{R}| \leq |\exp \mathbb{N}|$

(7.41)(3)(d)

3

$g: \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$

$\downarrow$

ω polopřímosti obsahující 0 a 2

těto polopřímosti přiřadíme terciální rozvoj
(získáme Cantorovo diskontinuum)

g je prosté $\to$ $|\exp \mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$

(7.4) (4) mějme A_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou spočetné

Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná

Prvky A_n zapíšeme $(a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots), (a_{21}, a_{22} \ldots)$

definujeme zobrazení $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

jako $f(k, l) = a_{kl}$.

f je zjevně na

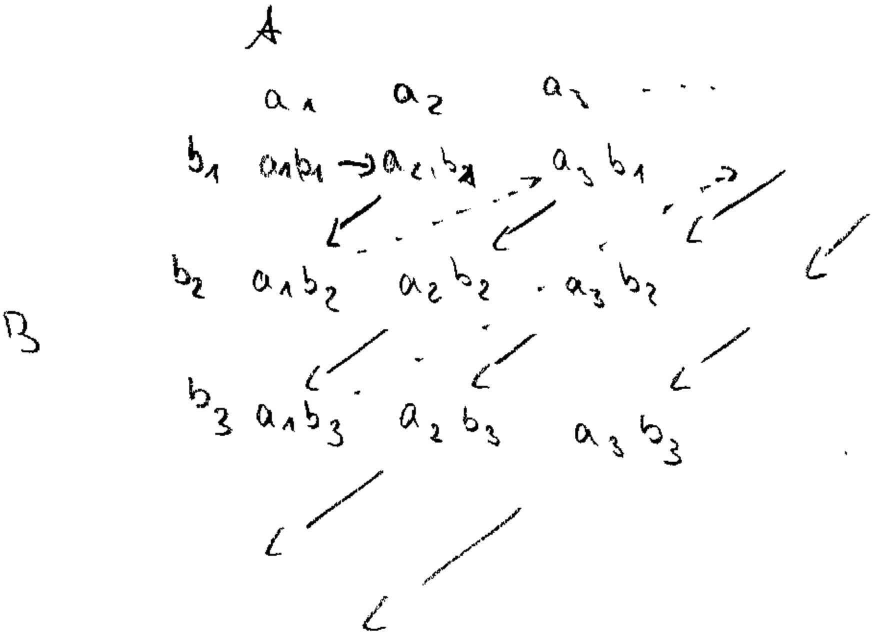
f nemusí být prosté (A_n mohou mít společné prvky), ale to nevadí, neb <u>Věta</u>.

<u>Pozn.</u> Lze to i "vícef"

(7.4) (6) A, B jsou spočetné $\Rightarrow$ $A \times B$ je spočetná (5)

Dle obrázku

A, B spoč $\rightarrow$ lze je seřadit do posloupnosti



předpis: dvojice (a_i, b_j) bude v posloupnosti

na místě $i + \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2}$

(7.4) / 7)

- nekonečná podmna B spoč. mny A má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$

$B \subseteq A$, A je spoč., B nekonečná

↓

lze seřadit do posloupnosti

B je pak vybraná posloupnost → také spočetná

(7.4)
(8) Množina $\forall$ zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\{0,1\}$ je nespočetná

Tato mna je vlastně množina $\exp \mathbb{N}$, a tu už máme.