2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1.

- Říkáme, že množiny A, B *mají stejnou mohutnost*, jestliže existuje bijekce A na B, píšeme $A \approx B$;
- Říkáme, že množina A *má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny* B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Píšeme $A \preceq B$; relaci „$\preceq$“ říkáme *subvalence*.

Definice 2. Řekneme, že množina X je *nekonečná*, jestliže má stejnou mohutnost jako nějaká její vlastní podmnožina. V opačném případě říkáme, že X je *konečná*. Řekneme, že množina X je *spočetná*, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se zove *nespočetná*.

Poznámka 3. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 4 (Cantor–Bernstein)**.** Nechť A, B jsou množiny takové, že A má mohutnost menší nebo rovnu než B a B má mohutnost menší nebo rovnu než A. Pak mají stejnou mohutnost.

Věta 5 (Cantor)**.** Nechť X je množina. Pak neexistuje zobrazení $\varphi : X \to \exp X$, které je „na“.

Věta 6. Je-li $f : A \to B$ zobrazení spočetné množiny A na nekonečnou množinu B, je i B spočetná.

Příklady

1. Dokažte matematickou indukcí:

   (a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

   (d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

2. Ukažte, že počet všech podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ je 2^n.

3. Buď X konečná množina, $|X| = n \in \mathbb{N}$. Označme pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$,

$$\binom{X}{k} = \{A \subseteq X;\ |A| = k\}\,.$$

   Potom platí

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}\,.$$

4. (a) Je-li A neprázdná množina, je A konečná právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že A má stejnou mohutnost jako $\{1, \ldots, n\}$.

   (b) Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou spočetné. Jakákoli nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ je také spočetná.

   (c) Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

   (d) Množiny $\mathbb{R}$, $\exp \mathbb{N}$ jsou nespočetné. Navíc mají tyto množiny stejnou mohutnost.

5. Nechť množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná.

6. Nechť množiny A, B jsou spočetné. Pak $A \times B$ je spočetná.

7. Každá nekonečná podmnožina spočetné množiny má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

8. Množina všech zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\{0, 1\}$ je nespočetná.