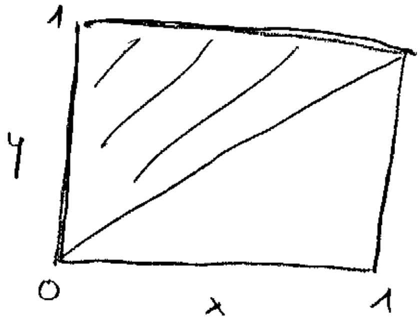
(7.3) (1) " ≤ " je bin. relace na $[0,1]$.

Znázorněte ji graficky

$x \leq y$



(7.3)(5)

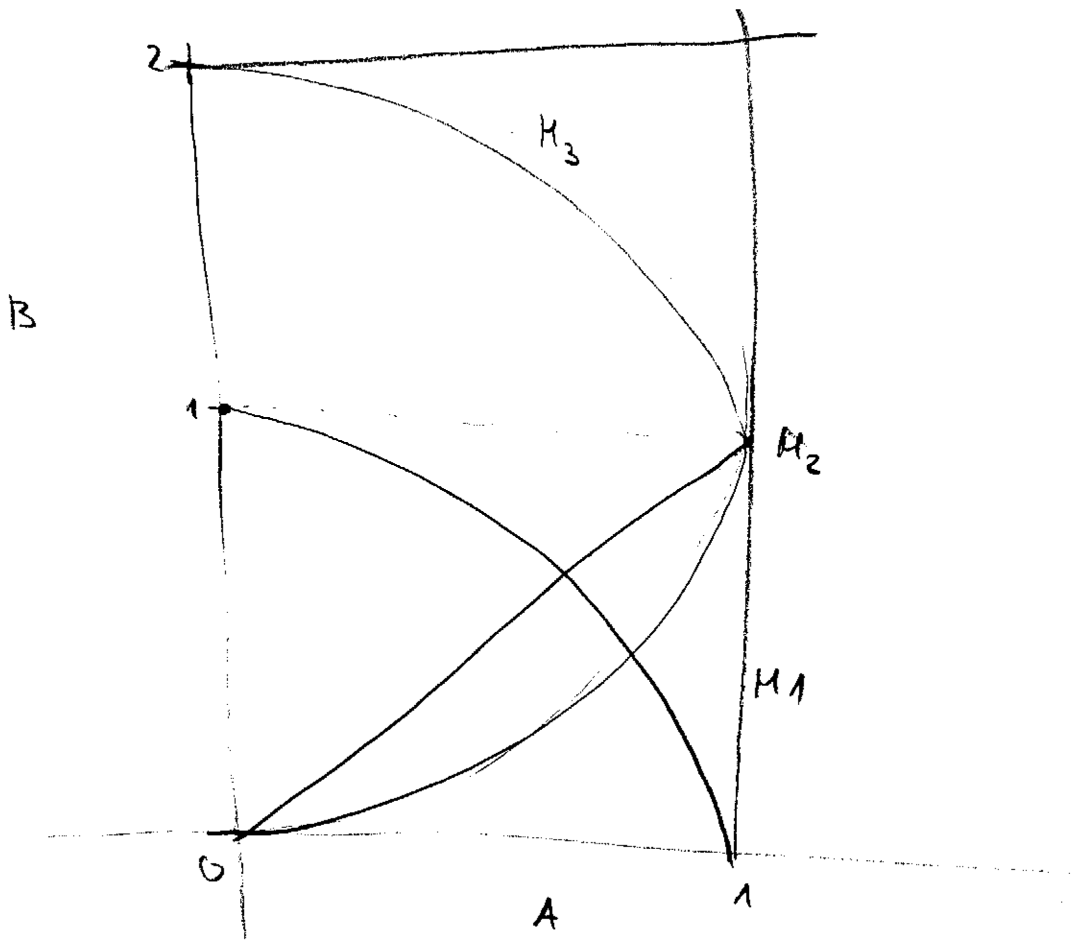
$A = [0,1]$, $B = [0,2]$

Která z násl. mn. je grafem n. zobrazení ?

$M_1 = \{ [x,y] \in A \times B \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \}$ ano

$M_2 = \{ \qquad ; \ y - x = 0 \}$ ano

$M_3 = \{ \qquad ; \ x^2 + (y-1)^2 = 1 \}$ ne



(20) Δ - nejednakost

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

Označimo

$$a = x - z$$
$$b = z - y$$

pa stoji

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

umocnimo

$$
\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)\overline{(a+b)} \\
&= (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) \\
&= a\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{b} + \overline{a\bar{b}} \\
&= |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(a\bar{b}) \\
&\leq |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a\bar{b}| \\
&= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||\bar{b}| \\
&= (|a| + |b|)^2
\end{aligned}
$$

(1a) skládání zobrazení je asociativní, ale nikoli komut. operace

$$W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$$

- asociativní

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

mějme $w \in W$

$$(h(g))(f(w)) \overset{?}{=} h(g(f(w)))$$

$$h(g(f(w))) = h(g(f(w)))$$

- není komutativní

$$X \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} X \qquad f \circ g \neq g \circ f$$

Protipříklad

$$f = x^2 \qquad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g = 3x$$

$$f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$$

$$\neq$$

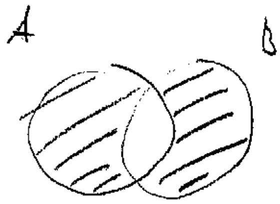
$$g(f(x)) = 3(x^2) = 3x^2$$

(15) $A \triangle B$

Def:

$(A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

"$\subseteq$"



nechť $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

BÚNO $x\in A$ & $x\notin B$

pak $x\in(A\cup B)$ // $x\in A\subset A\cup B$

a $x\notin A\cap B$ neb $x\notin B$

pro $x\in(B\setminus A)$ analogicky

"$\supseteq$"

nechť $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

BÚNO $x\in B$ & $x\notin A\cap B$

pak $x\in B$

ale $x\notin A \Rightarrow x\in B\setminus A$

(7.3) (10) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, rozhodněte o pravdivosti násl. tvrzení

A

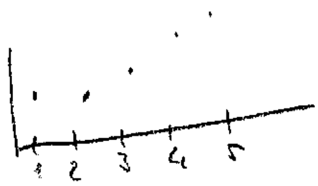
· Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté ✓ (6)

· Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté ✗

B

zobrazení $f(1) = 1$

$f(n) = n - 1 \quad n > 1$



Pozn.

$A \Rightarrow B'$

souvisí to ? Ne

$A' \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B'$	$A' \Rightarrow B$
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+
−	−	+	−

· $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté ✗

viz předchozí případ

platí to, kdybychom řekli, že pak je f na

· Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$ ✗

$f(n) = n + 1 \quad n \in \mathbb{N}$

je prosté, ale $f(\mathbb{N}) \not\ni \{1\}$

(7.3)
(11a)

$f: X \to Y \quad A \subset X, \quad B \subset X$ (7)

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

- $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

$f(A) \subseteq f(A \cup B)$

$f(A) = \{y \in Y, \ \exists x \in A : f(x) = y\}$

nechť $y \in f(A) \quad : \exists x \in A \quad f(x) = y$

$f(A \cup B) = \{y \in Y, \ \exists x \in (A \cup B) : f(x) = y\}$

jestliže $x \in A$, pak $x \in (A \cup B)$

$f(B)$ analogicky

- $f(A) \cup f(B) \supseteq f(A \cup B)$

zvolme $y \in f(A \cup B)$, chceme: $y \in f(A) \cup f(B)$

neb $y \in f(A \cup B)$ tak $\exists x \in A \cup B : f(x) = y$

$\to$ 2 možnosti $\quad x \in A \to y = f(x) \in f(A)$

$x \in B \to y = f(x) \in f(B)$

tedy $y \in f(A) \cup f(B)$

(7.2)(11) $f: X \to Y$, $C, D \subset Y$

(b)

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

"$\supseteq$" ! f^{-1} je vzor, nikoli invers!

zřejmé

"$\subseteq$"

nechť $x \in f^{-1}(C \cup D)$

tedy $\exists y \in C \cup D : f(x) = y$

pokud $y \in C \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$

$y \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(D)$

(c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

"$\subseteq$"

nechť $x \in f^{-1}(C \cap D)$ chceme: $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$\exists y \in C \cap D : f(x) = y$

tedy $y \in C$ & $y \in D$

pak $x = f^{-1}(y) \in f^{-1}(C)$

$x = f^{-1}(y) \in f^{-1}(D$

$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

"$\supseteq$"

$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$$\left.\begin{array}{l} \exists y \in C : f(x) = y \\ \exists z \in D : f(x) = z \end{array}\right\} f(x) = y = z \in C \cap D$$

tedy $x \in f^{-1}(C \cap D$

(7.3)(11)(d)

- $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

"$\subseteq$"

nech $x \in f^{-1}(C \setminus D)$

$\exists\, y \in C \setminus D \; : \; f(x) = y$

tedy $x \in f^{-1}(C)$

mušime ukázat : $x \notin f^{-1}(D)$

kdyby ano : $\exists\, z \in D,\; f(x) = z$

ale $\underset{\substack{\cap \\ C\setminus D}}{y} = f(x) = \underset{\substack{\cap \\ D}}{z}$ $\lightning$

"$\supseteq$"

$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$\exists\, y \in C : \; f(x) = y \quad \rightarrow \quad x \in f^{-1}(C)$

ale $\nexists\, z \in D : \; f(x) = z \quad \rightarrow \quad y \notin D : \; x \in f^{-1}(C \setminus D)$

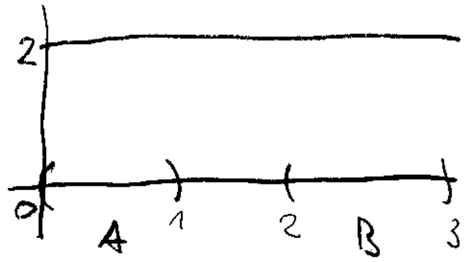
(7.3) (12a) $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset X$

ukažte, že obecně neplatí:

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ najdeme protipříklad:

$X = \mathbb{R}$ $A = (0,1)$

$Y = \mathbb{R}$ $B = (2,3)$



$f(x) = 2 \quad \forall x \in X$

pak $A \cap B = \emptyset$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A) = \{2\}$

$f(B) = \{2\}$ $f(A) \cap f(B) = \{2\}$

tedy $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

stejný protipříklad:

$f(A \setminus B) = f((0,1)) = \{2\}$

$f(A) = \{2\}$

$f(B) = \{2\}$ $f(A) \setminus f(B) = \{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$

tedy $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$

A	B	C	non A	non B	A&(B&C)	(A&B)&C	A&(B v C)	(A&B) v (B&C)	A v (B&C)	(A v B)&(A v C)	A –> B
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

A	B	C	non A	non B	A –> B	non B - > non A	non (A - > B)	A& non B
1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0

(21) $A_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou množiny. Pak

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \{n \in \mathbb{N},\ z \notin A_n\}$ je konečná $\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \{n \in \mathbb{N},\ z \in A_n\}$ není konečná $\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

(a) $\{n \in \mathbb{N},\ z \notin A_n\}$ je konečná

tedy $\exists n_0 : \forall k \geq n \quad z \in A_k$

tedy $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

obestujeme $\forall$ takové možné n_0

$\rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

(b) $\{n \in \mathbb{N},\ z \in A_n\}$ není konečná

(Pozn. z se vyskytuje v ∞ mnoha A_n
ale nic to neříká o množích, kde z není)

$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n_0 \quad z \in A_k$

$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

platí to pro $\forall n_0$, tedy nutno obestrat všechny