# 1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Definice 1.** Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu
$$A_1 \times \dots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n];\ \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \colon a_i \in A_i\},$$
tedy množinu uspořádaných $n$-tic $[a_1, \dots, a_n]$.
- *Binární relací* $R$ mezi množinami $A$ a $B$ rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi* $A$ *a* $B$ nebo o *relaci z* $A$ *do* $B$. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace $R$ značíme $[a, b] \in R$ nebo $aRb$.

**Definice 2.** Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny $A$ do množiny $B$ (a zpravidla značíme $F : A \to B$), jestliže platí
$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B \colon\ (([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$
Jsou-li $A, B$ množiny a $F \subset A \times B$ je zobrazení, pak tento fakt značíme symbolem $F : A \to B$.

**Definice 3.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu
$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M \colon\ f(x) = y\}$$
nazýváme *obrazem množiny* $M$ při zobrazení $f$.
- Nechť $P$ je libovolná množina. Pak množinu
$$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$
nazýváme *vzorem množiny* $P$ při zobrazení $f$.

**Definice 4.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že $f$ je *prosté* (*injektivní*), jestliže
$$\forall x, y \in A \colon\ (f(x) = f(y)\ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že $f$ je *„na“* (*surjektivní*), jestliže
$$\forall y \in B\ \exists x \in A \colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že $f$ je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

## Příklady

1. Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$“ tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

2. Nechť $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

   (a) $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + y^2 = 1\}$
   (b) $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\ y - x = 0\}$
   (c) $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

3. Dokažte, že absolutní hodnota splňuje takzvanou *trojúhelníkovou nerovnost*:
$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{C}\colon |x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

4. Dokažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní.

5. Ukažte, že pro symetrický rozdíl $A\Delta B$ množin $A$ a $B$ platí
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

6. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (a) Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není $f$ prosté.
   (b) Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je $f$ prosté.
   (c) Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je $f$ prosté.
   (d) Je-li $f$ prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

7. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$. Dokažte následující rovnosti.

   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
   (b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
   (c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
   (d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

8. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

   (a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
   (b) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

9. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků $A, B, C$ jsou následující výroky vždy pravdivé.

   (a) $A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C) \Leftrightarrow (A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C$,
   (b) $A \mathbin{\&} (B \vee C) \Leftrightarrow (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$,
   (c) $A \vee (B \mathbin{\&} C) \Leftrightarrow (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$,
   (d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,
   (e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \mathbin{\&} \neg B)$.

10. Nechť $A_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou množiny. Pak platí
$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \notin A_n\} \text{ je konečná}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \in A_n\} \text{ není konečná}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$