11. cvičení

4. 5. 2010

Teorie

Věta 1 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 2 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Definice 3. *Křivkou* budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že každá složka $\varphi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ je spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ (v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace).

Geometrickým obrazem křivky φ rozumíme množinu $< \varphi >= \varphi([a, b])$.

Věta 4 (Délka křivky)**.** Nechť $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Potom platí

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1')^2 + \cdots + (\varphi_n')^2} \quad (= \int_a^b ||\varphi'||).$$

Věta 5 (Objem a povrch rotačního tělesa)**.** Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\mathit{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\mathit{Povrch\ pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Příklady

Hint

Příklady

1. $$\int_{-1}^{1} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$$

2. $$\int_{a}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

3. $$\int_{-1}^{1} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

4. $$\int_{0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

5. $$\int_{4}^{9} \frac{x+1}{x+2\sqrt{x}-3}\mathrm{d}x$$

6. Spočtěte délku grafu funkce $x^2/2$, $x \in [0;1]$.

7. Vypočítejte délku křivky dané rovnicemi $x = 3t^2+1$, $y = t^3-3t$, $t \in [-1;1]$.

8. Najděte obsah oblasti vymezené grafy funkcí $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = 0$.

9. Najděte objem tělesa vzniklého rotací funkce e^{-x}, $x \geq 0$ kolem osy x.

10. Najděte objem pravidelného kužele s výškou h a poloměrem r.

Domácí úlohy