10. cvičení

27. 4. 2010

Teorie

1 Některé substituce

1.0.1 Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\tan \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a, -b) = R(a, b)$, lze užít substituci $\tan t = x$

1.0.2 Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\, dt$

$q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$, $af \neq bc$

- substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$

1.0.3 Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$, $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$: $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z *Eulerových substitucí*
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm\sqrt{a}t + x$ nebo $\sqrt{at^2 + bt + c} = tx + \sqrt{c}$

Příklady

Hint

Příklady

Nejprve se ubezpečíme, že rozumíme pokynům, jak vybrat správnou goniometrickou substituci. Ne-li, zeptáme se. Pro tyto substituce je třeba nejprve umět parciální zlomky, procvičit.

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$

   Řešení: substituce $t = \tan\frac{x}{2}$

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} \\ \sin x &= \frac{2t}{t^2+1} \end{aligned}$$

   tedy

   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -2\frac{1}{t+1}$$

   Zpětná substituce:

   $$F(x) := -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}$$

   a to na intervalu $(-\pi;\pi)+2k\pi$, to je ze substituce $\tan\frac{x}{2}$. Dále máme podmínky, $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$. Také máme podmínky $\tan\frac{x}{2} \neq -1$, které ale dávají stejnou podmínku na $x \neq -\pi/2$.

   A jdeme lepit (VOLSF):

   $$\lim_{x\to\pi-} F(x) = 0$$

   $$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = 0$$

   takže nemusíme funkce nijak posouvat a je třeba dodefinovat krajní body, udělat podmínky a připojit konstantu.

   $$\tilde{F}(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + c & x \in (-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) \setminus \{-\pi/2+2k\pi\} \\ 0 + c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

   V bodech $-\pi/2$ nelepíme, primitivní funkce tam vůbec není definovaná a ani původní integrál tam nedává smysl.

   Na závěr se ještě podíváme na substituci. Je druhého typu (vyjadřujeme $\mathrm{d}x$). $\phi^{-1}(t) = \tan\frac{x}{2}$, tedy $\phi : x = 2\arctan t$. Tedy ϕ je z $\mathbb{R}$ do $(-\pi,\pi)$, což nám zároveň dává intervaly, na nichž jsme získali primitivní funkci. (Nezapomene aplikovat podmínky, $t \neq -1$.)

Věta o substituci říká, na jakých intervalech máme primitivní funkci a kde ji máme lepit. Ne, že by nás to nenapadlo bez ní, ale věta říká, že to děláme legálně.

2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x}$$

Řešení: Jako výše, $t = \tan\frac{x}{2}$. Máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{2-\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} =$$
$$\int \frac{4}{3} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

Zpětná substituce:

$$F(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$$

na intervalu (viz výše) $(-\pi, \pi) + 2k\pi$

Lepení (VOLSF):

$$\lim_{x\to\pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
$$\lim_{x\to-\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Tedy budeme posouvat o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ a dodefinujeme v krajních bodech pomocí právě zjištěných limit, přidáme konstantu.

Celkem máme:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Podmínky substituce jsou stejné, jako u prvního příkladu. Je vhodné si podmínky základních substitucí promyslet předem (před písemkou).

3.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^2 x}$$

Řešení: Toto je příklad funkce, která je lichá v proměnné $\cos x$, tedy substituce: $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1-t^2)} = \int \frac{0}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t}\mathrm{d}t =$$
$$-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln|1-t| = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1-\sin x|$$

Tady není co lepit, protože logaritmus s jeho limitami v nekonečnu těžko slepíme. Tedy jen podmínky, z integrálu máme $x \neq k\pi/2$. Z výsledné primitivní funkce plyne totéž. Tedy substituce: je 1. typu, funkce $\phi : t = \sin x$, je definována na $\mathbb{R}$ (+nějaké podmínky, dané integrálem!). Váháte-li mezi typy substituce, tak si zkuste dosadit oba a podívejte se, co dává větší smysl.

4.
$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

Řešení: Funkce je sudá v obou proměnných, tedy $t = \tan x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Máme:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{1+\frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\mathrm{d}t =$$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \operatorname{arctan} t - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan} \sqrt{2}t$$

Tedy

$$F(x) = \operatorname{arctan} \tan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan} \sqrt{2}\tan x$$

Tangens je definován na $(-\pi/2; \pi/2)$, tedy k lepení potřebujeme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}+} F(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$

Celkem:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctan} \tan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan} \sqrt{2}\tan x + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c & x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + 2\pi) \\ \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Substituce byla 2. typu. $\phi : x = \operatorname{arctan} t$ je definována na $\mathbb{R}$, zobrazuje do $(-\pi/2; \pi/2)$, kde je pak také definovaná primitivní funkce.

5.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

Řešení: Substituce je $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$, po troše počítání

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$$

,

$$\mathrm{d}x \;=\frac{t^2-1}{t}\frac{2t^2-t^2+1}{2t^2}$$

Tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(1+t)2t^3}\mathrm{d}t \;=\frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\mathrm{d}t \;=$$
$$\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \;=\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}|-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2}\right)$$

Podmínky, $t\neq 0$, což ale nenastane. Substituce je 2. typu, tedy $\phi : x=(\frac{t^2-1}{2t})^2$, a je z $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ do $(0,\infty)$. Na tomto intervalu máme i primitivní funkci.

6.

$$\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $t=\sqrt[6]{x}$,

$$x=t^6$$
$$\mathrm{d}x \;=6t^5\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}\mathrm{d}x \;=\int \frac{t^6-1}{t^6(t^3+t^4)}6t^5\mathrm{d}t \;=6\int \frac{t^6-1}{t^4+t^5}\mathrm{d}t \;=$$
$$6\int (t-1)+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\mathrm{d}t \;=6\left(-t+\frac{1}{2}t^2+\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)=$$
$$6\left(-\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{x}^2+\ln|\sqrt[6]{x}|+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}^2}+\frac{1}{3\sqrt[6]{x}^3}\right)$$

Substituce 2. typu, integrál máme na $(0,\infty)$.

7.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

tedy

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{-4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\mathrm{arctan}\, t - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Dosazení a podmínky 2. substituce laskavý čtenář sám:)

8.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}$$

čili

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\mathrm{d}x = \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}\frac{1}{t+\frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}}\frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + 2\frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + 2\ln|t-1| + \frac{3}{t-1}\right)$$

Opět dosazení je jednoduché, substituce je 2. typu a podmínky znamenají plno důležité práce.