9. cvičení

20. 4. 2010

Teorie

Definice 1. *Racionální funkcí* budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 2 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\text{st } P < \text{st } Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\dots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\dots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1,\dots,x_k$, $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, $\beta_1,\dots,\beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

(iv) $p_1,\dots,p_k$, $q_1,\dots,q_l \in \mathbb{N}$,

(v) žádné dva z mnohočlenů $x-x_1$, $x-x_2,\dots,x-x_k$, $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots$, $x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen,

(vi) mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots$, $x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1,\dots,A_{p_1}^1,\dots,A_1^k,\dots,A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1,\dots,B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1,\dots$, B_1^l, $C_1^l,\dots,B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x-x_1} \\ & + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

Postup při integraci racionální funkce

1. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int P_1(x) + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\text{st } P_2 < \text{st } Q$, $Q \neq 0$.
2. Provedeme rozklad na parciální zlomky.
3. Integrace parciálních zlomků:

(a)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{-A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & n>1 \\ A\ln|x-a| & n=1 \end{cases}$$

toto pro $x \in (-\infty, a)$ nebo (a, ∞).

(b)

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q} = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\mathrm{d}x + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}$$

$$\frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\mathrm{d}x \;= \begin{cases} \frac{-1}{q-1}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & q>1 \\ \ln(x^2+\alpha x+\beta) & q=1 \end{cases}$$

pro $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\right)^q} =$$

$$\frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^q}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right]^q}$$

provedeme substituci $t = \frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}$, celý integrál bude

$$\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-q}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q}$$

pro $q=1$ získáme arkustangens, pro jiná q je potřeba použít perpartes a postupně snižovat mocninu:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q} = \int \frac{1+t^2}{(t^2+1)^q}\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^q} = \int \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^q}$$

První integrál je o stupeň nižší, druhý integrál proženeme per partes a získáme:

$$\int t\frac{2t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{1-q}\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} - \frac{1}{1-q}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{q-1}}$$

celkem tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{2q-2}\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} + \frac{2q-3}{2q-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}}\mathrm{d}t$$

Příklady

Hint

Příklady

1. $$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x$$

2. $$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

3. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

4. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$$

5. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$$

6. $$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x$$

7. $$\int \frac{x^4}{(x^{10}-10)^2}\mathrm{d}x$$

8. $$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$$

9. $$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$$

10. $$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x$$

11. Odvoďte sami rekurentní vzorec pro

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad a \neq 0$$

12. Za pomoci substituce $t = \frac{x+a}{x+b}$ odvoďte

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n} = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}\mathrm{d}t$$

Domácí úlohy

Navštivte knihovnu v Karlíně a nainstalujte si Mathematicu. Nebo alespoň zkuste online:

`http://integrals.wolfram.com/index.jsp`