8. cvičení

13. 4. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 2.

- $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $0 \cdot \int f \subset \int 0 \cdot f$.
- Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f+g) = \int f + \int g$.
- Je-li $\int f$ neprázdná, pak $\int f - \int f = \{c; c \in \mathbb{R}\}$.

Věta 3 (O substituci)**.** (i) Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a,b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a,b).$$

Věta 4 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Pokud je f navíc spojitá na I, pak množiny na obou stranách rovnosti jsou neprázdné.

Příklady

Hint

$$\frac{1}{y^2(1+y)} = \frac{1-y}{y^2} + \frac{1}{1+y}$$

Příklady

1.
$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x$$

Řešení: Substituujeme: $y = \sqrt{x}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{2}{2} \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \int 2\arctan\, y \cdot \frac{1}{1+y^2} \mathrm{d}y$$

substituujeme ještě jednou, $z = \arctan\, y$, $\mathrm{d}z = \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$.

$$\int 2\arctan\, y \cdot \frac{1}{1+y^2} \mathrm{d}y = \int 2z\mathrm{d}z = z^2 + c = \arctan\,^2 y + c = \arctan\,^2 \sqrt{x} + c$$

Zbývají podmínky. Nejprve se podívejme na funkci v integrálu, zjevně $x > 0$. Pro první substituci (je to 1. typ) tedy máme funkci $y = \sqrt{x}$ a bude definovaná na $(0, \infty)$, s hodnotami tamtéž. Na tomto intervalu má i vlastní derivaci. Ze znění věty pak vyplyne, že nalezená primitivní funkce bude definována také na tomto intervalu.

Pak máme druhou substituci. V tuto chvíli už se pohybujeme na $(0, \infty)$. Substituujeme funkcí $z = \arctan\, y$, budeme to provádět stále na tom samém intervalu, opět 1. typ substituce, vlastní derivace tam existuje.

Tedy celkový výsledek je $\arctan\,^2 \sqrt{x} + c$ na intervalu $(0, \infty)$.

2.
$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $y = 1 + \cos^2 x$, $\mathrm{d}y = -2\cos x \sin x \mathrm{d}x$, tedy

$$\int \frac{-2}{2} \frac{\sin x \cos x \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2} \frac{y-1}{y} \mathrm{d}y = -\frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{y} \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}(y - \ln|y|) =$$
$$-\frac{1}{2}(1 + \cos^2 x - \ln(1 + \cos^2 x)) + c$$

Opět jde o první typ substituce, funkce $\phi(x) = 1 + \cos^2 x$ z věty je definovaná na celém $\mathbb{R}$ (interval (α, β) z věty) , zobrazuje do $(1, 2)$. Funkce $f = -\frac{1}{2}\frac{y-1}{y}$. Její primitivní funkci $F = -\frac{1}{2}(y - \ln|y|)$, definovaná pro $y \neq 0$, speciálně pro $(0, \infty)$ (tedy (a, b)). Tedy konkrétně i pro $y \in (1, 2)$. Celkem tedy $-\frac{1}{2}(1 + \cos^2 x - \ln(1 + \cos^2 x)) + c$ na $\mathbb{R}$.

3.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+e^x}$$

Řešení: Substituce $y = e^{x/2}$, $\mathrm{d}y = 1/2e^{x/2}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y/e^{x/2} = 2\mathrm{d}y/y$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+e^x} = \int \frac{1}{y+y^2}\frac{2}{y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1-y}{y^2} + \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{-1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{1+y} =$$
$$2\left(-\frac{1}{y} - \ln|y| + \ln|1+y|\right) = 2\left(-\frac{1}{e^{x/2}} - \frac{x}{2} + \ln(1+e^{x/2}\right)$$

Toto byla substituce 2. typu. Bylo totiž potřeba (téměř) vyjádřit $x = \ln y^2$, a derivaci $\mathrm{d}y$ si ve výrazu nejprve vyrobit. Tedy máme funkci $\phi^{-1} : y = e^{x/2}$, $\phi : x = \ln y^2$. Funkce je z intervalu $(0,\infty)$ (naše (α,β)), **na** $\mathbb{R}$ ((a,b)), derivaci má všude nenulovou (důležité!).

Zbývá funkce $f = \frac{1}{e^{x/2}+e^x}$. Ta je definovaná na $\mathbb{R}$. Poslední podmínka: výpočet integrálu

$$\int \frac{1}{y+y^2}\frac{2}{y}\mathrm{d}y = 2\left(-\frac{1}{y} - \ln|y| + \ln|1+y|\right),$$

toto platí na intervalu $(0,\infty)$. Všechny podmínky splněny, hurá. Jediným problémem může být rozklad na zlomky uprostřed výpočtu, ten se naučíme příště. Příklad je poučný, promyslet.

4.

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $y = \sin x$, $\mathrm{d}y = \cos x\mathrm{d}x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - y^2$. Tedy

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x = \int (1-y^2)^2\sqrt{y}\mathrm{d}y = \int \sqrt{y} + y^{9/2} - 2y^{/2} =$$
$$\frac{2}{3}y^{2/3} + \frac{2}{11}y^{11/2} - \frac{4}{7}y^{7/2} + c = \frac{2}{3}\sin^{2/3} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + c$$

Substituce je 1. typu, funkce $\phi(x) = \sin x$ je z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, vlastní derivace je na celém definičním oboru. Funkce $f = (1-y^2)^2\sqrt{y}$, tam je podmínka na $y \geq 0$. Tedy je potřeba omezit definiční obor ϕ tak, aby zobrazovala do nezáporných čísel, aby $\sin x \geq 0$. Laskavý čtenář dopočte sám. Všimněte si, že odmocnina se objeví i ve výsledku (takže ty podmínky tam nejsou pro legraci, docela dobře to celé funguje).

5.

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $y = \ln x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/x$.

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x = \int \frac{y}{\sqrt{1+y}}\mathrm{d}y = \int \frac{y1}{\sqrt{1+y}} - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\mathrm{d}y = \int \sqrt{1+y} - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\mathrm{d}y =$$
$$\frac{2}{3}(1+y)^{3/2} - 2(1+y)^{1/2} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} - 2(1+\ln x)^{1/2} + c$$

Tedy $f = y/\sqrt{1+y}$, $y > -1$. Takže je třeba, aby $\ln x > -1$, $x > 1/e$, zároveň jsme splnili podmínku na derivaci $x \neq 0$. Tedy řešení se nalézá na intervalu $(1/e, \infty)$.

6.
$$\int x \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

Řešení: $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$, $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$, máme

$$\int x \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int 2yy^2 \sin y\mathrm{d}y$$

nyní použijeme třikrát per partes nebo formulku z 10. příkladu. Získáme

$$-2y^3\cos y + 6y^2 \sin y + 12y\cos y - 12\sin y =$$
$$-2\sqrt{x}^3\cos\sqrt{x} + 6\sqrt{x}^2\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x}$$

Substituce byla 2. typu, konkrétně $\phi : x = y^2$, $\phi' : \mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$, $\phi^{-1} : y = \sqrt{x}$, $f = x\sin\sqrt{x}$. Funkce f je definována na $[0,\infty)$, ale primitivní funkce hledáme jen na otevřených intervalech(proč?), tedy se omezíme na $(0,\infty) = (a,b)$. Funkci ϕ budeme definovat na intervalu $(0,\infty) = (\alpha,\beta)$, tam má nenulovou derivaci, zobrazuje ho na (a,b), podmínky splněny, výslednou primitivní funkci jsme také našli na intervalu $(0,\infty)$.

7.
$$\int x^3 e^{3x}\mathrm{d}x$$

Řešení: Řešíme per partes nebo formulkou z 10. příkladu, ověřte si, že skutečně funguje. Výsledek:
$$e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right)$$

8.
$$\int x^5 \sin 5x\mathrm{d}x$$

Řešení: Totéž, výsledek:

$$-\cos 5x\left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625}\right) + \sin 5x\left(\frac{x^4}{5} - \frac{12x^2}{125} + \frac{24}{3125}\right)$$

9.
$$\int \phi(x)\mathrm{d}x,$$

kde $\phi(x)$ je vzdálenost čísla x od nejbližšího celého čísla.

Řešení: Toto je nutno rozkreslit, vyjde lineární funkce (na daném intervalu), tam zintegrovat. A pak slepit. Výsledek:

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\left(1 - 2\left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|\right)$$

10. Dokažte, že je-li $P(x)$ polynom stupně n, pak

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^n(x)}{a^{n+1}}\right] + c$$

$$\int P(x)\cos ax\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + c$$

$$\int P(x)\sin ax\mathrm{d}x = \frac{-\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + c$$

Řešení: Dokážeme per partes, hlavně si ale z tohoto příkladu odneseme vědomí, že existuje tento vzorec, že ho umíme odvodit a že když už to umíme odvodit, tak že to není nutno pokaždé dělat. Ušetří nám práci.

11. Nechť $f(x)$ je monotónní spojitá funkce a $f^{-1}(x)$ její inverzní funkce. Dokažte, že pokud $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$, pak $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c$. **Řešení:** Dokážeme snadno, prostě zderivujeme pravou stranu. Připomeneme si, co víme o derivaci inverzní funkce.

Domácí úlohy

1. Naučte se definici primitivní funkce, stejnoměrné spojitosti, příklad funkce, která není stejnoměrně spojitá, Riemannova integrálu.