8. cvičení

13. 4. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 2.
- $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $0 \cdot \int f \subset \int 0 \cdot f$.
- Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f + g) = \int f + \int g$.
- Je-li $\int f$ neprázdná, pak $\int f - \int f = \{c; c \in \mathbb{R}\}$.

Věta 3 (O substituci)**.** (i) Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Věta 4 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Pokud je f navíc spojitá na I, pak množiny na obou stranách rovnosti jsou neprázdné.

Příklady

Hint

$$\frac{1}{y^2(1+y)} = \frac{1-y}{y^2} + \frac{1}{1+y}$$

Příklady

1. $$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

2. $$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

3. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}+e^x}$$

4. $$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$$

5. $$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$$

6. $$\int x\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

7. $$\int x^3 e^{3x}\mathrm{d}x$$

8. $$\int x^5\sin 5x\mathrm{d}x$$

9. $$\int \phi(x)\mathrm{d}x,$$
   kde $\phi(x)$ je vzdálenost čísla x od nejbližšího celého čísla.

10. Dokažte, že je-li $P(x)$ polynom stupně n, pak
$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^n(x)}{a^{n+1}}\right]+c$$
$$\int P(x)\cos ax\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+ \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+c$$
$$\int P(x)\sin ax\mathrm{d}x = \frac{-\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+ \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+c$$

11. Nechť $f(x)$ je monotónní spojitá funkce a $f^{-1}(x)$ její inverzní funkce. Dokažte, že pokud $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$, pak $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c$.

Domácí úlohy

1. Naučte se definici primitivní funkce, stejnoměrné spojitosti, příklad funkce, která není stejnoměrně spojitá, Riemannova integrálu.