1. (Hledání primitivní funkce)

   Spočítejte rychlost a polohu jako funkce času, pokud zrychlení mělo tento časový průběh:
   $$a(t) = A\,\sin(\omega\,t), \quad A, \omega \in \mathbb{R}^+$$
   (harmonický oscilátor - takto se pohybuje například závaží na pružině nebo atom v krystalické mřížce (v prvním přiblížení))
   $$a(t) = -2ABe^{-B\,t}\omega\cos(\omega\,t) + AB^2e^{-B\cdot t}\sin(\omega\,t) - Ae^{-B\,t}\omega^2\sin(\omega\,t), \quad A, B, \omega \in \mathbb{R}^+$$
   (tlumený harmonický oscilátor)

2. (Použití derivací k odvození vztahu.)

   Ukažte, že zákon lomu je přímým důsledkem Fermatova principu.

   Zákon lomu říká, že $n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \cdot \sin\alpha_2$, kde $n_i = c/v_i$ je index lomu prostředí, v_i je rychlost šíření světla v daném prostředí a c je rychlost šíření světla ve vakuu - konstanta.

   Fermatův princip tvrdí, že světlo se mezi danými dvěma body prostoru šíří po takové trajektorii, po které mu to zabere nejmenší čas).

   Návod:

   Zaveďte si vhodně souřadnicovou soustavu, umístěte si tam rovinné rozhraní (přímku) a body A a B, každý na opačné straně rozhraní. Trajektorii paprsku světla uvažujte jako dvě úsečky. Vyjádřete čas putování paprsku v závislosti na tom, kde se úsečky stýkají.

3. (Použití derivace v praxi.)

   Zjistěte, jaký má tvar hladina vody ve válcové nádobě, jež se otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí ω.

   Návod:

   Hledáme funkci h(r), h - výška hladiny, r - vzdálenost od osy rotace.

   Hladina je kolmá na výslednici sil. Působící síly jsou tíhová ($\mathbf{F_G} = -m \cdot g\,\mathbf{e_h}$) a odstředivá ($\mathbf{F_o} = m \cdot |r| \cdot \omega^2\,\mathbf{e_r}$). Poměr těchto sil nám dá derivaci $h'(r)$, stačí zintegrovat.

4. (Jednoduchá diferenciální rovnice.)

   Předpokládejme, že k penězům uloženým v bance $p(t)$ nám **v každý okamžiku** přibývají úroky (ne jen jednou za měsíc nebo za rok). Předpokládejme, že úroky závisejí na **aktuálním** množství peněz na účtu ($p'(t) \sim p(t)$). Zjistěte, jaká je konstanta úměrnosti, pokud nám za rok přibylo na účtu 5 % počátečního množství peněz.

Věta "O substituci, varianta 1"

Nechť F je primitivní funkcí k f na (a, b).

Nechť zobrazení $\varphi : t \to x, \quad t \in (\alpha, \beta), \quad x \in (a, b)$ má vlastní derivaci φ' v každém bodě $t \in (a, b)$.

Pak platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{1.}{=} \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \right) = F(\varphi(t)) + C \quad na \quad (\alpha, \beta).$$

Věta "O substituci, varianta 2"

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) **nenulovou** vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$.

Nechť funkce f je definovaná na (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F(\varphi(t)) + C) = G(t) + C \quad na \quad (\alpha, \beta),$$

kde G je složení $F\varphi$, pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{1.}{=} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi - 1(x)G(t) + C \right) = G(\varphi^{-1}(x)) + C \quad na \quad (a, b).$$

Poznámky

1. (Viz dvě označené rovnosti.) Toto je základní rovnost, která se používá. Věty nám říkají, že můžeme použít substituce

   $$\varphi(t) = x, \quad \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x,$$

   či

   $$t = \varphi^{-1}(x), \quad \mathrm{d}t = (\varphi'(t))^{-1}\,\mathrm{d}x$$

   ke zjednodušení integrálu.

2. Podle toho, jakou substituci budeme používat, podle toho budeme ověřovat předpoklady dané věty.

3. Požadavek nenulovosti derivace je zřejmý ze vztahu $\mathrm{d}t = (\varphi'(t))^{-1}\,\mathrm{d}x$

Jednoduché příklady na substituci:

1. $\int (x^2 - 3x + 1)(2x - 3)\,\mathrm{d}x$
2. $\int (2x + 1)^{10}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \cos^m(x) \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$, m - sudé přirozené, n - liché přirozené

Příklad:

Ukažte použití obou vět o integraci na integrálu $\int x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

Podle první věty bude substituce vypadat takto:

$$\left|\begin{array}{lc} (\varphi :) & y = \sqrt[3]{1-x} \\ (\varphi' :) & dy = \frac{1}{3}\frac{-1}{\sqrt[3]{[(1-x)^2]}}\,dx \quad \left(= -\frac{1}{3y^2}\,dx\right) \end{array}\right|$$

Podle druhé věty bude substituce vypadat následovně:

$$\left|\begin{array}{cc} (\varphi^{-1} :) & y = \sqrt[3]{1-x} \\ (\varphi :) & x = 1 - y^3 \\ (\varphi' :) & dx = -3y^2\,dy \end{array}\right|$$