6. cvičení

30. 3. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 2.
1. Ne každá funkce má primitivní funkci (např. $\operatorname{sign} x$).
2. Primitivní funkce je spojitá.
3. Hledání primitivní funkce se nazývá integrací a primitivní funkce se někdy nazývá neurčitý integrál.

Věta 3 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 4 (Existence primitivní funkce)**.** Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 5 (Linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Poznámka 6.
- Je-li F primitivní funkce k f na intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt jako $F = \int f$ na (a, b), $F(x) = \int f(x)$, $x \in (a, b)$, nebo $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$, $x \in (a, b)$
- Je-li f funkce na (a, b), značením $\int f$ rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na (a, b).
- Je-li f reálná funkce, značením $\int f$ rozumíme množinu všech funkcí F, které jsou primitivní k f na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru f.

Poznámka 7.
1. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f.
2. Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $A, B \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak značíme
$$\alpha A = \{\alpha a; a \in A\}, \quad A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$
3. Je-li f funkce na otevřeném intervalu I, množina $\int f$ je obsažena ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^I$ všech reálných funkcí na I. Pak Větu 5 můžeme zapsat jako $\int(\alpha f + \beta g) \supset \alpha \int f + \beta \int g$ na I. Dále na I platí
   - $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

- $0 \cdot \int f \subset \int 0 \cdot f$.
- Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f+g) = \int f + \int g$.
- Je-li $\int f$ neprázdná, pak $\int f - \int f = \{c; c \in \mathbb{R}\}$.

Věta 8 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Pokud je f navíc spojitá na I, pak množiny na obou stranách rovnosti jsou neprázdné.

0.1 Základní integrály

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \text{arctan } x + c = -\text{arcctg } x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\text{cotg } x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + c$$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\mathrm{d}x = -\text{cotanh } x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \text{tgh } x + c$$

Příklady

Hint

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + c$$

Příklady

Budeme používat per partes a základní definice a linearitu integrálu. Je dobré vědět, že per partes funguje jenom tam, kde dotčené funkce mají primitivní funkce. Tedy hledáme definiční obory, vyhýbáme se místům s problematickou derivací (absolutní hodnoty), dáváme pozor na zlomky. Neřekneme-li jinak, jsme na $\mathbb{R}$.

1.
$$\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x \quad a \in \mathbb{R}$$

Řešení: Integrál je snadno vidět, takže jen pro pořádek:

$$\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x = \ln(x+a) + c$$

$x \neq -a$

2.
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

Řešení: Rozepíšeme a snadno zintegrujeme za použití linearity integrálu

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$$

$x > 0$

3.
$$\int \operatorname{cotg}{}^2 x\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int \operatorname{cotg}{}^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int -1\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -x - \cot x + c$$

$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Použili jsme linearitu integrálu a známý integrál.

4.
$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$$

Řešení: Zde je třeba užít trik, za pomoci nápovědy zjistíme, že

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

což už snadno zintegrujeme, vytkneme konstantu a máme:

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1 - \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

Kdyby byly nějaké nejasnosti s konstantami (třeba $\sin 2x$), tak užijeme větu o substituci, kterou již známe, nebo prostě vyzkoušíme.

5.

$$\int \tan x \mathrm{d}x$$

Řešení: Tady pomůže buď substituce, ale hlavně se na výraz koukat a přemýšlet, co s tím, čemu je to podobné. Vzpomeneme si, že logaritmus háže věci do jmenovatele a máme:

$$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \ln|\cos x| + c.$$

Dáváme pozor na to, že k logaritmu patří absolutní hodnota. Nezapomeneme vyšetřit podmínky ($x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

6.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

Řešení: Tady je situace podobná, buď substituujeme, ale hlavně se díváme. Tento integrál je důležitý, budeme si ho pamatovat:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2} + c$$

7.

$$\int \operatorname{arctan} x \mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctan} x \mathrm{d}x$$

Použijeme metodu per partes, kde $u'(x) = 1$, $u(x) = x$, $v(x) = \operatorname{arctan} x$, $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pak

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctan} x\mathrm{d} = x \cdot \operatorname{arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\operatorname{arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Integrál $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ spočteme opět buď substitucí nebo metodou kouknu a vidím. Obecně si budeme pamatovat, že pachatelem v případě zlomků bývá logaritmus (případně odmocnina, arkusinus a arkustangens) a nezapomínáme na vnitřní funkci. Čím víc příkladů spočteme, tím snáze to uvidíme.

8.

$$\int x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$\int x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{2}x^2 \cdot (-2x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

Nyní lze užít per partes: $v = -x^2\frac{1}{2}$, $v' = -x$, $u' = -2xe^{-x^2}$, $u = e^{-x^2}$, tedy

$$\int \frac{-1}{2}x^2 \cdot (-2x)e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{-x^2}{2}e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{-x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

Proč jsme zvolili funkce na perpartes právě takhle: nejprve proto, že když zkusíme přirozené rozdělení na x^3 a na e^{-x^2}, tak to nevede k cíli. Tedy přemýšlíme, co s tím, zkusíme tam vnutit derivaci od e^{-x^2}, ejhle, funguje to. Poslední integál je opět "vidět", x^2 se jako vnitřní funkce objevuje docela často, tak si na něj vzpomeneme.

9.

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

Řešení: Per partes, $u = \ln(\sin x)$, $u' = \frac{\cos x}{\sin x}$, $v' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $v = -\cot x$, tedy

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x \ln(\sin x) + \int \cot^x \mathrm{d}x = -x - \cot x - \cot x \ln(\sin x) + c,$$

$x \neq k\pi$,

poslední integrál už známe z předchozích příkladů.

10.

$$\int x \cos x \mathrm{d}x$$

Řešení: Per partes $u = x$, $u' = 1$, $v' = \cos x$, $v = -\sin x$, máme

$$\int x \cos x \mathrm{d}x = x \sin x + \int \sin x = x \sin x + \cos x + c$$

11.

$$\int \frac{\arcsin\, x}{x^2}\mathrm{d}x$$

Řešení: per partes, $u' = 1/x^2$, $u = -1/x$, $v = \arcsin\, x$, $v' = 1/\sqrt{1-x^2}$,

$$\int \frac{\arcsin\, x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\arcsin\, x + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{-\arcsin\, x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + c$$

$x \neq 1, -1, 0$, poslední zlomek máme z nápovědy, udělá se vytknutím x^2, substitucí za $1/x$.

12.

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

Řešení: per partes $u'=1$, $u=x$, $v=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $v'=\frac{1+(1+x^2)^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\frac{1+(1+x^2)^{-1/2}2x}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x =$$
$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x =$$
$$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2},$$

užité integrály už známe.

13.

$$\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

Řešení: per partes, $v'=\sqrt{x}$, $v=\frac{2}{3}s^{3/2}$, $u=\ln^2 x$, $u'=\frac{2\ln x}{x}$,

$$\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln x,$$

nové per partes: $t'=\sqrt{x}$, $t=2/3u^{3/2}$, $w=\ln x$, $w'=1/x$, máme

$$\int \sqrt{x}\ln x = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2}$$

$x>0$,

Dohromady získáme

$$\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2}\right)$$

Domácí úlohy

1.

$$\int |x|\mathrm{d}x$$

2.

$$\int e^{-|x|}\mathrm{d}x$$

3.

$$\int f'(2x)\mathrm{d}x$$

4.

$$\int xf''(x)\mathrm{d}x$$