6. cvičení

30. 3. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 2.

1. Ne každá funkce má primitivní funkci (např. sign$x$).
2. Primitivní funkce je spojitá.
3. Hledání primitivní funkce se nazývá integrací a primitivní funkce se někdy nazývá neurčitý integrál.

Věta 3 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 4 (Existence primitivní funkce)**.** Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 5 (Linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Poznámka 6.

- Je-li F primitivní funkce k f na intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt jako $F = \int f$ na (a, b), $F(x) = \int f(x)$, $x \in (a, b)$, nebo $F(x) = \int f(x) \mathrm{d}x$, $x \in (a, b)$
- Je-li f funkce na (a, b), značením $\int f$ rozumíme množinu všech primitivních funkcí k f na (a, b).
- Je-li f reálná funkce, značením $\int f$ rozumíme množinu všech funkcí F, které jsou primitivní k f na každém otevřeném intervalu obsaženém v definičním oboru f.

Poznámka 7.

1. Značení $\int f$ tady znamená množinu primitivních funkcí, $F = \int f$ znamená, že F je primitivní k f.
2. Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $A, B \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak značíme
$$\alpha A = \{\alpha a; a \in A\}, \quad A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$
3. Je-li f funkce na otevřeném intervalu I, množina $\int f$ je obsažena ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^I$ všech reálných funkcí na I. Pak Větu 5 můžeme zapsat jako $\int(\alpha f + \beta g) \supset \alpha \int f + \beta \int g$ na I. Dále na I platí
    - $\int \alpha f = \alpha \int f$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

- $0 \cdot \int f \subset \int 0 \cdot f$.
- Mají-li f, g primitivní funkce, pak $\int (f+g) = \int f + \int g$.
- Je-li $\int f$ neprázdná, pak $\int f - \int f = \{c; c \in \mathbb{R}\}$.

Věta 8 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Pokud je f navíc spojitá na I, pak množiny na obou stranách rovnosti jsou neprázdné.

0.1 Základní integrály

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan\, x + c = -\mathrm{arcctg}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\, x + c = -\arccos\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan\, x + c$$

$$\int \sinh\, x \mathrm{d}x = \cosh\, x + c$$

$$\int \cosh\, x \mathrm{d}x = \sinh\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh\, ^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotanh}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh\, ^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tgh}\, x + c$$

Příklady

Hint

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + c$$

Příklady

1. $$\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x \quad a \in \mathbb{R}$$
2. $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
3. $$\int \operatorname{cotg}^2 x\mathrm{d}x$$
4. $$\int \sin^2 x\mathrm{d}x$$
5. $$\int \tan x\mathrm{d}x$$
6. $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$
7. $$\int \arctan x\mathrm{d}x$$
8. $$\int x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x$$
9. $$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$
10. $$\int x\cos x\mathrm{d}x$$
11. $$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$$
12. $$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$
13. $$\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

Domácí úlohy

1. $$\int |x|\mathrm{d}x$$
2. $$\int e^{-|x|}\mathrm{d}x$$
3. $$\int f'(2x)\mathrm{d}x$$
4. $$\int xf''(x)\mathrm{d}x$$