5. cvičení

23. 3. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Taylorovou řadou se středem v bodě a. Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě.* Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Definice 2. *Mocninnou řadou* o středu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $a_k \in \mathbb{R}$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Věta 3. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy, splňující:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Věta 4 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\rho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \rho$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| > \rho$, uvedená řada diverguje.

Prvek ρ splňuje

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

Věta 5 (Derivace mocninné řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje pro $|x-x_0| < R$. Definujme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0| < R.$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje pro $|x-x_0| < R$ a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad |x-x_0| < R.$$

Věta 6 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pak

(a) $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Věta 7 (Abel)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n$ konverguje v bodě $y = x_0 + R$. Pak

$$\lim_{r \to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Poznámka 8. Analogické tvrzení platí pro $y = x_0 - R$.

Poznámka 9. Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně pouze pro $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro které diverguje. Pro $\alpha < 0$ řady divergují.

Příklady

Hint

$$(2\arctan x/2)' = \frac{1}{1+x^2/4}$$

Příklady

1. Co můžeme říct o součtu řad,

   (a) je-li jedna z nich konvergnetní a jedna divergentní? **Řešení:** Pak jejich součet diverguje. Úvahu je možno vést přes definici řady, ta konvergentní má konvergentní posloupnost částečných součtů. Pokud tohle zdůvodnění nestačí, je vhodné si rozhodit součty na případy. Jestliže jedna má kladný součet a druhá jde k $-\infty$, tak můžeme použít větu o aritmetice limit (na limity částečných součtů) a získáme divergentní limitu částených součtů. A tak dále. Pokud bude jedna řada oscilovat a druhá konvergovat, tak opět vezmeme posloupnost částečných součtů a vybereme dvě podposloupnosti s odlišnými limitami (to půjde, vezmeme limsup a liminf, máme na to věty, které?), a použijeme součet limit částečných součtů. Získáme dvě odlišné limity.

(b) jsou-li obě divergentní? **Řešení:** Mohou nastat různé situace a nevíme nic.

i.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 0$$

ii.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

iii.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

konverguje.

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci:

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$$

Řešení: Použijeme Dirichletovo kritérium, posloupnost

$$\sin \frac{n\pi}{12}$$

má omezené částečné součty, jednak si to pamatujeme a jednak je možno si jednotlivé členy rozepsat, začnou se opakovat... Posloupnost

$$\frac{1}{\ln n}$$

je monotónní, neboť logaritmus je rostoucí, jeho převrácená hodnota je tedy klesající a jde k 0.

Absolutně diverguje, to lze dokázat následující úvahou: hodnoty sinu se budou neustále opakovat, objeví se jich tam 12, tedy lze řadu roztrhnout na dvanáct sčítanců, každý bude s konstantou v čitateli a logaritmem ve jmenovateli. Takže zbývá otázka, jestli řada s logaritmem, kde sčítáme jen každý dvanáctý člen, musí divergovat. Nejprve najdeme alespoň jednu takovou řadu, která diverguje. Kdyby všech 12 řad konvergovalo, tak konverguje i součet, ale my víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\ln n$ diverguje. Takže alespoň 1 řada z našich dvanácti diverguje.

Ale co když je to zrovna ta, kde $\sin = 0$? Nevadí, nyní už víme, že jedna řada diverguje. Odhadneme tedy řadu těsně před ní. Ta bude mít členy větší, porovnávat řady umíme, také diverguje. Rozmyslete si, co dělat, když je to hned první řada.

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Promyslete si, jak to dokážete a že to není samozřejmé. Jednou z možností je použít Heineho větu.

Určete poloměr konvergence a konvergenci v krajních bodech:

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

Řešení: Pro určení poloměru konvergence je třeba nejprve správně určit členy a_n. Ony se totiž nerovnají $1/2^n$, ale $a_n = 1/2^{\sqrt{n}}$. Toto je dobré si promyslet. Pak už spočteme

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = 1.$$

Kdyby byly potíže s touto limitou, tak použijte větu 3, Heineho, Větu o limitě složené funkce.

Tedy krajní body jsou 1 a -1. v obou případech dostáváme geometrickou řadu, o které víme, že konverguje absolutně.

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a, b > 0$$

Řešení: Počítáme

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}}}$$

Tedy pro $a \geq b$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a,$$

plyne to třeba ze dvou policajtů. Tedy $\rho = a$. Analogicky pro $a < b$, $\rho = b$. Celkem $\rho = max\{a, b\}$.

Konvergence v krajnich bodech. Nechť $a \geq b$, pak nás zajímá řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n}$$

Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1$$

Obdobně pro bod $-a$ a pro případ $b > a$.

Určete poloměr konvergence:

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$

Za pomoci vhodně zvolené mocninné řady sečtěte:

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n2^{2n-1}}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{2^{2n+1}}$$

11. Vyšetřete konvergenci následující řady:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

    Návod: prozkoumejte jednotlivé úseky, kde se mění znaménko, zkuste je odhadnout shora a pak na "nové" sčítance použít Leibnize.

Domácí úlohy

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

2. Naučte se definici malého o a větu o poloměru konvergence.