5. cvičení

23. 3. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Taylorovou řadou se středem v bodě a. Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě.* Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Definice 2. *Mocninnou řadou* o středu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $a_k \in \mathbb{R}$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Věta 3. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy, splňující:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Věta 4 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\rho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \rho$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \rho$, uvedená řada diverguje.

Prvek ρ splňuje

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

Věta 5 (Derivace mocninné řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje pro $|x - x_0| < R$. Definujme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0| < R.$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje pro $|x - x_0| < R$ a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad |x-x_0| < R.$$

Věta 6 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pak

(a) $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$.

Věta 7 (Abel)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n$ konverguje v bodě $y = x_0 + R$. Pak

$$\lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Poznámka 8. Analogické tvrzení platí pro $y = x_0 - R$.

Poznámka 9. Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně pouze pro $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro které diverguje. Pro $\alpha < 0$ řady divergují.

Příklady

Hint

$$(2\arctan x/2)' = \frac{1}{1+x^2/4}$$

Příklady

1. Co můžeme říct o součtu řad,
   (a) je-li jedna z nich konvergnetní a jedna divergentní?
   (b) jsou-li obě divergentní?

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci:

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

Určete poloměr konvergence a konvergenci v krajních bodech:

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a, b > 0$$

Určete poloměr konvergence:

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$

Za pomoci vhodně zvolené mocninné řady sečtěte:

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n2^{2n-1}}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{2^{2n+1}}$$

11. Vyšetřete konvergenci následující řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

Návod: prozkoumejte jednotlivé úseky, kde se mění znaménko, zkuste je odhadnout shora a pak na "nové" sčítance použít Leibnize.

Domácí úlohy

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

2. Naučte se definici malého o a větu o poloměru konvergence.