4. cvičení

16. 3. 2010

Teorie

Věta 1 (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Potom
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

Věta 2 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

Věta 3 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\rho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \rho$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| > \rho$, uvedená řada diverguje.

Prvek ρ splňuje
$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$
kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

Věta 4 (Derivace mocninné řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje pro $|x-x_0| < R$. Definujme
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0| < R.$$
Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje pro $|x-x_0| < R$ a platí
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad |x-x_0| < R.$$

Věta 5 (Jednoznačnost mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ jsou mocninné řady s kladnými poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pokud
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \min\{\rho_1,\rho_2\}, x_0 + \min\{\rho_1,\rho_2\}),$$
pak $a_n = b_n$ pro každé $n = 0,1,2,\ldots$ a $\rho_1 = \rho_2$.

Věta 6 (Vztah k Taylorovu polynomu)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má kladný poloměr konvergence. Pak $\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 řádu n.

Věta 7 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pak

(a) $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$.

Věta 8 (Abel)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n$ konverguje v bodě $y = x_0 + R$. Pak

$$\lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Poznámka 9. Analogické tvrzení platí pro $y = x_0 - R$.

Věta 10 (Toeplitz)**.** Nechť $\{c_{n,k}; n,k \in \mathbb{N}\}$ jsou reálná čísla splňující:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,

(2) $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$,

(3) posloupnost $\{\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

Pak pro každou konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Příklady

Hint

$$n = 1/2(2n+1) - 1/2$$

Určete poloměr konvergence a konvergenci v krajních bodech:

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Řešení: Budeme používat Větu o poloměru konvergence, nejprve se podívejme na jednotlivé prvky zadání.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

Nyní je zřejmé, že $a_n = 1/(n!)$, $x_0 = 0$. Dosadíme do vzorce:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Jelikož posloupnost má limitu, tak se netrápíme s limes superior a počítáme jako s limitou, existuje-li limita, tak se už rovná limsup i liminf. Pozor na tu poslední rovnost, ze 1/0 je nekonečno je jenom naše úmluva a v žádném případě to neplatí obecně! (Není to limita.)

Celkem jsme zjistili, že poloměr konvergence je ∞ tedy řada konverguje na celém $\mathbb{R}$. Krajní body neřešíme, limitu v nekonečnech také ne (suma a limita se nedají libovolně prohazovat, pozor na to).

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad a, b > 0$$

Řešení: Buď můžeme zkusit použít větu o operaci s mocninnými řadami nebo zkusit úlohu vyřešit přímo.

$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$

Vyšetříme dva případy, nejprve $a \geq b$, pak

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} \overset{VOAL}{=} a$$

$$\rho = \frac{1}{a}$$

analogicky pro $a < b$:

$$b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \overset{VOAL}{=} b$$

$$\rho = \frac{1}{b}$$

Tedy $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.

Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou $\rho = \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$a $-\rho = -\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$.

Nechť $a \geq b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2} \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (vše je tu kladné!) a zjistíme, že řada diverguje, jelikož je to kladné, tak i v absolutní hodnotě. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{(-1)^n}{a^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2}\right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě $-1/a$ konverguje, ale nikoli absolutně.

Nechť $a<b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\frac{1}{b^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{b^n n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod $-1/b$, můžeme rozvnou říci, že řada konverguje absolutně.

Tím jsme hotovi, jen je třeba dát pozor na případ $a=b$.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}x^n \quad a\in(0,1)$$

Řešení: $a_n=a^{n^2}$, tedy

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{n^2}{n}}=a^n=0$$

Tedy $\rho=\infty$.

4.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$$

Řešení: $a_n=\frac{n!n!}{(2n)!}$,

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!n!}{(2n)!}}$$

použijeme známou větu a počítáme:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}$$

Tedy $\rho=4$.

Pro $x = -4$ máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 x^n 4^n}{(2n)!}$$

použijeme Leibnize a zjišťujeme, zda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme a_n a a_{n+1}:

$$\frac{a_n}{a_n+1} = \frac{n!n!4^n(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!4\cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost a_n je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.

Sečtěte zadané řady na jejich poloměru konvergence:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n}$$

Řešení: Nejprve je třeba určit, jak vlastně vypadají koeficienty řady. Řadu rozvíjíme v bodě 2, můžeme psát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(\sqrt{3})^{2n}}$$

Pokud bychom chtěli řadu převést na klasický tvar, tak bychom zjistili, že každý lichý koeficient je nulový, každý sudý je $(\sqrt{3})^n$.

Odtud můžeme spočíst

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{3^n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nulové členy jsou menší, čili jsme je zanedbali,

$$\rho = \sqrt{3}.$$

Nyní můžeme začít řadu sčítat, opět si ji přepíšeme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{3}\right)^n$$

To je geometrická řada, jejíž součet známe, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-2)^2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{(x-2)^2}{3}} = \frac{(x-2)^2}{3-(x-2)^2}$$

Tento součet platí pro všechna x na intervalu $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$. Zajímají nás krajní body. Nechť tedy $x = 2+\sqrt{3}$, dosadíme do řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+\sqrt{3}-2)^{2n}}{(\sqrt{3})^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{3})^{2n}}{(\sqrt{3})^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

což diverguje.

Nyní druhý bod, $x = 2-\sqrt{3}$, získáme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\sqrt{3}-2)^{2n}}{(\sqrt{3})^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(\sqrt{3})^{2n}}{(\sqrt{3})^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

což také diverguje.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Řešení: Nejprve spočteme poloměr konvergence:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\rho = 1.$$

Kdyby to byla geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, tak bychom ji uměli sečíst. A kdybychom takovou geometrickou řadu zderivovali, tak bychom získali: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, což už je dost podobné tomu, co máme. Tedy položme:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Použili jsme Větu o derivaci mocninné řady, součet geometrické řady a pak jsme to jen seskládali dohromady. Zbývají krajní body, $x = 1$ a $x = -1$. Pokud bychom dosadili, tak získáme: $\sum_{n=1}^{\infty} n$, což diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$, což nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Promyslete si vztah mezi řadou a funkcí, že můžeme derivovat a k čemu nám to bylo dobré.

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

Řešení: Situace analogická jako výše, $\rho = 1$,

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)'' = x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)''$$

Tedy
$$f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3},$$

divergence krajních bodů se odůvodní stejně, jako v předchozím příkladě.

Opět jsme derivovali dle věty, pozor na to, že je občas potřeba zkontrolovat indexy u řad, zda odpovídají, také je třeba ošetřit součet geometrické řady, která nejde od $n = 0$, ale až od jedničky.

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Řešení: Řada nápadně připomíná rozvoj sinu a kosinu.

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Trochu nám překáží to n, kterého se zbavíme pomocí hintu: $n = (2n+1)/2 - 1/2$ a dosadíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(2n+1)\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Roztrhneme na 2 řady (jelikož následně zjistíme, že konvergují, tak to bude v pořádku):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(2n+1)\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x}{2}(\cos x - 1)$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{2}(\sin x - x)$$

Opět seskládáme dohromady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(2n+1)\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2}$$

Řady pro sinus a kosinus mají rozvoj na celém $\mathbb{R}$, a i ze vzorce pro výpočet poloměru konvergence získáme rozvoj naší řady na celém $\mathbb{R}$ (dosaďte sami). Při rozvoji bylo třeba ošetřit posunuté indexování (pozor na znaménka).

5.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \quad |x|, |y| < 1$$

Řešení: (Opravené zadání, k jde od 0.) U tohoto příkladu se bude hodit Mertensova věta, jen je třeba správně určit řady a_n a b_m, ale to nebude těžké, přímo se nabízí geometrické řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} y^m = \frac{1}{1-y}$$

Tyto řady konvergují absolutně, tedy užití věty nic nebrání a zjistíme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Domácí úlohy

1. Najděte poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci v krajních bodech

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$$

2. Naučte se definici Taylorovy a mocninné řady.