4. cvičení

16. 3. 2010

Teorie

Věta 1 (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Věta 2 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Věta 3 (Poloměr konvergence)**.** Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\rho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \rho$, uvedená řada konverguje absolutně,
- pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \rho$, uvedená řada diverguje.

Prvek ρ splňuje

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme $+\infty$ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0.

Věta 4 (Derivace mocninné řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje pro $|x - x_0| < R$. Definujme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad |x - x_0| < R.$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ konverguje pro $|x - x_0| < R$ a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad |x - x_0| < R.$$

Věta 5 (Jednoznačnost mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ jsou mocninné řady s kladnými poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pokud

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \min\{\rho_1, \rho_2\}, x_0 + \min\{\rho_1, \rho_2\}),$$

pak $a_n = b_n$ pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $\rho_1 = \rho_2$.

Věta 6 (Vztah k Taylorovu polynomu)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má kladný poloměr konvergence. Pak $\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n$ je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 řádu n.

Věta 7 (Operace s mocninnými řadami)**.** Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mají kladné poloměry konvergence ρ_1 a ρ_2. Pak

(a) $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$,

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < \min\{\rho_1,\rho_2\}$.

Věta 8 (Abel)**.** Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n$ konverguje v bodě $y = x_0 + R$. Pak

$$\lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Poznámka 9. Analogické tvrzení platí pro $y = x_0 - R$.

Věta 10 (Toeplitz)**.** Nechť $\{c_{n,k}; n,k \in \mathbb{N}\}$ jsou reálná čísla splňující:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,

(2) $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$,

(3) posloupnost $\{\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

Pak pro každou konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Příklady

Hint

$$n = 1/2(2n+1) - 1/2$$

Určete poloměr konvergence a konvergenci v krajních bodech:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n \quad a \in (0,1)$$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$$

Sečtěte zadané řady na jejich poloměru konvergence:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k} \quad |x|, |y| < 1$$

Domácí úlohy

1. Najděte poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci v krajních bodech

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$$

2. Naučte se definici Taylorovy a mocninné řady.