3. cvičení

9. 3. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

nazýváme *m-tým částečným součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Tuto limitu (tj. součet řady) budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Jestliže existuje $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní (tj. jestliže má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konečný součet), pak říkáme, že řada *konverguje*, neboli *je konvergentní.* Jestliže limita neexistuje nebo existuje, ale je nevlastní, pak říkáme, že řada *diverguje*, neboli *je divergentní.*

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť existuje $K > 0$ takové, že pro každé $m \in\ N$ jest

$$\left|\sum_{j=1}^{m} a_j\right| \leq K.$$

Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má *omezené částečné součty.*

Věta 3 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená monotónní posloupnost. Nechť je splněna některá z následujících podmínek:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,

(D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Příklady 4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Věta 5 (Leibniz)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost splňující

- $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq 0,$
- $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq a_{n+1},$

Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní právě tehdy, když $\lim a_n = 0$.

Příklady

Vyšetřete konvergence následujících řad:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\ln(\ln n)}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\ln n)^2}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctan n$$

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad:

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n} \qquad z \in \mathbb{R}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3n - 100\sqrt{n}}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln^2 n}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

Domácí úlohy

Vyšetřete konvergenci řady, kde $[x]$ je dolní celá část x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$