2. cvičení

2. 3. 2010

Teorie

Věta 1 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže
$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \quad \text{a} \quad f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$
pak
$$(f_1 + f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(b) Jestliže
$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad \text{a} \quad f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$
pak
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

(c) Jestliže
$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R},$$
pak
$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Definice 2. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a*. Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*. (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Definice 3. *Cauchyovým součinem* řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right).$$

Věta 4 (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Potom
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Věta 5 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

Příklady 6.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1;1)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} \quad x \in (-1;1)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} \quad x \in (-1;1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1;1)$$

Příklady

Spočtěte limity:

1.
$$\lim_{n\to\infty}\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}$$

Řešení: Nejprve uděláme rozvoje:

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$(1+\frac{1}{x^6})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2x^6} + o(\frac{1}{x^{12}})$$

a dosadíme:

$$\lim_{n\to\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\cdot(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)) - x^3(1 + \frac{1}{2x^6} + o(\frac{1}{x^{12}}) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o(\frac{1}{x^3}) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{6x^4} - \frac{1}{x}o(\frac{1}{x^3}) + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$+\frac{\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{12x^5} + \frac{1}{2x^2}o(\frac{1}{x^3}) + -1 - \frac{1}{2x^6} - o(\frac{1}{x^12})}{\frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x}\frac{o(\frac{1}{x^3})}{+}\frac{o(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{2x^2}\frac{o(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{x^3}} - \frac{1}{x^9}\frac{o(\frac{1}{x^{12}})}{\frac{1}{x^{12}}} = \frac{1}{6}$$

Jako obvykle jme použili jsme Peanovu větu. Podrobnější návody hledejte v minulém cvičení.

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\mathrm{ctgh}x\right)$$

Řešení:
$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\mathrm{ctgh}x\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{\cos x}x\right)=\frac{1}{x}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}$$

rozvineme:
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+R_3^{\sin x,0}$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+R_2^{\cos x,0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+R_3^{\sin x,0}-x+\frac{x^3}{2}-xR_2^{\cos x,0}}{x^2\sin x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+R_3^{\sin x,0}+\frac{x^3}{2}-xR_2^{\cos x,0}}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\overset{VOAL}{=}(\frac{1}{3}+0-0)\cdot 1=\frac{1}{3}$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\arctan x-x}{x(2e^x-e^{2x}-1)}$$

Řešení:
$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$e^x=1+x1\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$
$$e^{2x}=1+2x+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{6}+o(x^3)$$

celkem:
$$\lim_{x\to 0}\frac{-x+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{6}-\frac{-x^2}{2}o(x^3)+o(x^2)[x-\frac{x^3}{3}]+o(x^3)o(x^2)}{-x^3-x^4+xo(x^3)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}\frac{-\frac{5}{6}+\frac{x^2}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}-\frac{x^2}{2}\frac{o(x^3)}{x^3}+\frac{o(x^2)}{x^2}-\frac{o(x^2)}{x^2}\frac{x^2}{3}+x^2\frac{o(x^2)}{x^2}\frac{o(x^3)}{x^3}}{-1-x+x\frac{o(x^3)}{x^3}}\overset{VOAL}{=}\frac{5}{6}$$

Při výpočtu jsme použili větu o vlastnostech malého o, konkrétně první část o součtu (sečetli jsme očka od e^x a od e^{2x}.

4.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

5. Díky znalosti rozvoje $1/(1-x)$ rozviňte $1/(x^2+1)$.

6. Rozviňte funkci $x^2 \cos x$ v 0 do polynomu s x^6.

7. Rozviňte funkci
$$\frac{e^x}{1-x}.$$

8. Rozviňte funkci tangens jako podíl.

Domácí úlohy

1. Ověřte pomocí Taylorova rozvoje vzorec pro
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
.