2. cvičení

2. 3. 2010

Teorie

Věta 1 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže
$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a, \quad \text{a} \quad f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$
pak
$$(f_1 + f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(b) Jestliže
$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad \text{a} \quad f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$
pak
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

(c) Jestliže
$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R},$$
pak
$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Definice 2. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a*. Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*. (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Definice 3. *Cauchyovým součinem* řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right).$$

Věta 4 (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Potom
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Věta 5 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

Příklady 6.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1;1)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} \quad x \in (-1;1)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} \quad x \in (-1;1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1;1)$$

Příklady

Spočtěte limity:

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \mathrm{ctgh}x\right)$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\arctan x - x}{x(2e^x - e^{2x} - 1)}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

5. Díky znalosti rozvoje $1/(1-x)$ rozviňte $1/(x^2+1)$.
6. Rozviňte funkci $x^2\cos x$ v 0 do polynomu s x^6.
7. Rozviňte funkci
$$\frac{e^x}{1-x}.$$
8. Rozviňte funkci tangens jako podíl.

Domácí úlohy

1. Ověřte pomocí Taylorova rozvoje vzorec pro
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
.