1. cvičení

Teorie

Definice 1. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě* a *malé o od* g (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Poznámka 2. Symbol malé o patří mezi tzv. Landauovy symboly.

Definice 3. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Věta 4 (Peanův tvar zbytku)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f je reálná funkce s konečnou n-tou derivací v bodě a a P je polynom stupně nejvýše n. FIE (následující tvrzení jsou ekvivalentní)

(i) $P = T_n^{f,a}$;

(ii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Poznámka 5.

1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*
2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Věta 6 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a, x \in \mathbb{R}$ a $a < x$. Předpokládejme, že f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci.

Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Definice 7. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a.* Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Poznámka 8. Může se stát, že Taylorova řada bude konvergovat pouze pro $x = a$, nebo sice bude konvergovat, ale ne k hodnotě $f(x)$.

Příklady 9. Následující rozvoje konvergují k funkci na zadaném intervalu, rozvíjíme v 0 a budeme je nadále automaticky používat.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$,
- $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in (-1, 1)$.

Příklady

1. Dle vzorce pro řadu rozviňte e^y a dosaďte $y = x^2$. Pak udělejte Taylorův rozvoj pro e^{x^2} a porovnejte.

   Řešení: Budeme rozvíjet funkci $f(x) = e^{x^2}$ v $a = 0$. Nejprve spočteme derivace.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{x^2} \cdot 2x \\
f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + 2e^{x^2} \\
f''(0) &= 2e^0 = 2 \\
f'''(x) &= e^{x^2} \cdot 8x^3 + e^{x^2} \cdot 8x + 2e^{x^2} 2x \\
f'''(0) &= 0
\end{aligned}
$$

   Nyní dosadíme do vzorce:

$$
T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n
$$

$$
T_3^{e^{x^2},0}(x) := 1 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{2}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 = 1 + x^2
$$

   Další derivace si zajisté spočtete sami:)

   A nyní jiný přístup. Víme, že rozvoj e^y v 0 vypadá následovně:

$$
e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.
$$

   Dosadíme $y = x^2$. Máme tedy:

$$
e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \cdots
$$

Vzpomeneme si, co víme o jednoznačnosti polynomu, o tom, že můžeme provést substituci a budeme si pamatovat, že polynomy oběma způsoby počítání vychází stejně a není to náhoda.

2. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$. Jak vypadá Taylorova řada pro polynomy?

   Řešení: První problém je, jak dlouhá řada bude. Uvidíme.

$$f'(x) = -4x - 6$$
$$f'(4) = -22$$
$$f''(x) = -4$$
$$f''(4) = -4$$

   Všechny další derivace už jsou rovny 0, čímž jsme získali odpověd na otázku, jak bude dlouhý rozvoj. Dosadíme:

$$T_2^{f,4} = -54 - 22(x-4) - 4(x-4)^2 = -2x^2 - 6x + 2$$

   Vyšel nám původní polynom. Opět zauvažujeme o aproximaci polynomů, o jejich jednoznačnosti a stupni.

3. Napište $T_5^{\tan x,0}$.

   Řešení: Tady bude spousta derivování. Derivací bude stejně, jako je stupeň polynomu, tedy 5.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$
$$f'''(x) = 2\frac{1}{\cos^4 x} + 4\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$$
$$f^{(iv)}(x) = \frac{8\sin x}{\cos^5 x} + 8\frac{\tan x}{\cos^4 x} + \frac{8\tan^3 x}{\cos^2 x}$$
$$f^{(v)}(x) = 8\left(\frac{2\cos x + 10\cos^4 x \sin x + 3\sin^2 x \cos x - 5\cos x \sin x}{\cos^{10} x}\right)$$

   Dosazení 0 do derivace už nebudeme rozepisovat a rovnou výsledek:

$$T_5^{\tan x,0} = 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + \frac{2}{6}x^3 + 0\cdot x^4 + \frac{16}{120}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

4. Napište Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = \ln(\cos x)$ v bodě $a = 0$ až do členu s x^4.

Řešení: Nyní už rutinně:

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$$
$$f'''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x}$$
$$f^{(iv)}(x) = -2\frac{1}{\cos^4 x} - 4\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$$

Opět rozvoj v 0, tedy máme:

$$T_4^{\ln(\cos x),0} = 0 + 1 \cdot 0 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot x^3 - \frac{2}{24}x^4$$

Spočtěte limity:

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

Řešení: Nejprve rozvineme některé funkce:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3^{e^x,0}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3^{\sin x,0}$$

a nyní dosadíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3^{e^x,0}\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + R_3^{\sin x,0}\right) - x(1+x)}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + R_3^{\sin x,0} + x^2 - \frac{x^4}{6} + xR_3^{\sin x,0} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^2}{2}R_3^{\sin x,0}}{x^3} +$$
$$\frac{xR_3^{e^x,0} - \frac{x^3}{6}R_3^{e^x,0} + R_3^{\sin x,0} \cdot R_3^{e^x,0} - x - x^2}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + R_3^{\sin x,0} - \frac{x^4}{6} + xR_3^{\sin x,0} + -\frac{x^5}{12} + \frac{x^2}{2}R_3^{\sin x,0} + xR_3^{e^x,0} - \frac{x^3}{6}R_3^{e^x,0} + R_3^{\sin x,0} \cdot R_3^{e^x,0}}{x^3} =$$
$$\overset{VOAL}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{6x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{12x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{R_3^{\sin x,0}}{x^3} + \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{R_3^{\sin x,0}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{R_3^{\sin x,0}}{x^3} +$$
$$\lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0}\frac{R_3^{e^x,0}}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{6}\lim_{x\to 0}\frac{R_3^{e^x,0}}{x^3} + \lim_{x\to 0} x^3 \lim_{x\to 0}\frac{R_3^{\sin x,0}}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{R_3^{e^x,0}}{x^3} =$$
$$\frac{1}{3}$$

Všimneme si, že místy je vhodné si půjčit a vrátit. Jednotlivé limity nyní už spočítáme snadno, je třeba použít jen Peanovu větu, která nám řekne, že $\lim_{x\to 0}\frac{R_3^{\sin x,0}}{x^3} = 0$ a $\lim_{x\to 0}\frac{R_3^{e^x,0}}{x^3} = 0$. Jak jsme poznali, že je třeba rozvíjet do třetího stupně. Jistou nápovědou je jmenovatel (x^3) a v čitateli $x - x^2$, musíme rozvíjet alespoň tak dlouho, abychom tento problémový člen požrali.

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

Řešení: Nejprve převedeme na společného jmenovatele a pak rozvedeme $\sin x$.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x}$$
$$\sin x = x + 0 + R_2^{\sin x,0}$$

tady si všimneme toho, že x je rozvoj sinu jak prvního, tak druhého stupně. A dosadíme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + R_2^{\sin x,0} - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{R_2^{\sin x,0}}{x^2}\frac{x}{\sin x} \overset{VOAL}{=} \cdot 1 = 0$$

Použili jsme opět Peanovu větu, známou limitu sinu a šikovně jsme si půjčili a vrátili. Pozor na rozvíjení sinu, pokud udělámа rozvoj "jen" do prvního stupně, tak to nebude stačit, je třeba udělat polynom stupně 2. Co na tom, že vypadají stejně:)

3.
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$$

Řešení: První otázka je, co vůbec s tím. Tak nejprve je třeba převést výraz na nějaký tvar, který už umíme rozvinout. Nabízí se výraz $(1+y)^\alpha$. Zároveň přemýšlíme, kde se tento výraz dá rozvinout (totiž) na (-1;1) a co s tím. Tedy

$$\sqrt[6]{x^6 + x^5} = \sqrt[6]{x^6\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Jelikož x jde k nekonečnu, tak se zajíste výraz $1/x$ dostane časem pod jedničku. Tedy můžeme rozvíjet:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} = \binom{1/6}{0} + \binom{1/6}{1}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} = \binom{1/6}{0} - \binom{1/6}{1}\frac{1}{x} + o\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Nelekneme se použité Peanovy věty, která nám poskytla možnost vše zapsat za pomoci malého o, a dosadíme:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{6x}+o\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty} x+\frac{1}{6}+xo\left(\frac{1}{x}\right)-x+\frac{1}{6}-xo\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Nyní je potřeba jen převést výraz na nějaký rozumný tvar, co už umíme řešit:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}+\frac{o\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}\overset{VOAL}{=}\frac{1}{3}$$

Popřemýšlíme, proč zlomky s $o(1/x)$ jdou k 0. Jelikož $x\to\infty$, tak $1/x\to 0$ a celou dobu se tak pohybujeme kolem 0, u které také máme Peanovu větu (všimněte si, že v jejím znění není o nekonečnu ani slovo, vše je reálné). Díky tomu je celá akce také v pořádku.

Mimo jiné si budeme pamatovat, že limity u nekonečna je vhodné nějakým způsobem převést k 0, protože v nekonečnu nemáme nástroje k jejich řešení.

4.

$$\lim_{x\to\infty} x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Řešení: Rozvineme logaritmus:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

a dosadíme:

$$\lim_{x\to\infty} x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\overset{VOAL}{=}\frac{1}{2}$$

Zdůvodnění je stejné, jako u předchozího příkladu. Je-li vám to příjemnější, je možné udělat rovnou subtituci $y=1/x$ (odůvodníme podmínky u limity složené funkce:) a řešíme s y).

1. Určete přibližnou hodnotu $\sqrt{e}$ a odhadněte chybu.
2. Určete hodnotu e s přesností 10^{-4}.
3. Určete chybu pro $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, kde $x\in[-1/2,1/2]$.
4. Určete chybu pro $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, kde $x\in[0,1]$.
5. Určete hodnotu pro $\ln(1.01)$ s přesnotí 10^{-4}.

Domácí úlohy

1. Určete přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt[3]{30}$ a odhadněte chybu.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$