1. cvičení

23. 2. 2010

Teorie

Definice 1. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě a malé o od g* (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definice 2. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Věta 3 (Peanův tvar zbytku)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f je reálná funkce s konečnou n-tou derivací v bodě a a P je polynom stupně nejvýše n. FIE

(i) $P = T_n^{f,a}$;

(ii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Poznámka 4.

1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*
2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Věta 5 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a, x \in \mathbb{R}$ a $a < x$. Předpokládejme, že f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci.

Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Definice 6. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a.* Je-li $a = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Příklady 7.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$,
- $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in (-1, 1)$.

Příklady

1. Dle vzorce pro řadu rozviňte e^y a dosaďte $y = x^2$. Pak udělejte Taylorův rozvoj pro e^{x^2} a porovnejte.
2. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$. Jak vypadá Taylorova řada pro polynomy?
3. Napište $T_5^{\tan x, 0}$.
4. Napište Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = \ln(\cos x)$ v bodě $a = 0$ až do členu s x^4.

Spočtěte limity:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$
3. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$$
4. $$\lim_{n\to\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

1. Určete přibližnou hodnotu $\sqrt{e}$ a odhadněte chybu.
2. Určete hodnotu e s přesností 10^{-4}.
3. Určete chybu pro $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, kde $x \in [-1/2, 1/2]$.
4. Určete chybu pro $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, kde $x \in [0, 1]$.
5. Určete hodnotu pro $\ln(1.01)$ s přesnotí 10^{-4}.

Domácí úlohy

1. Určete přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt[3]{30}$ a odhadněte chybu.
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$