12.cvičení

17.12.2009

Teorie

Věta 1 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 2 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** (a) (*verze* „$\frac{0}{0}$") Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$$

a nechť existuje

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) (*verze* „$\frac{\text{cokoli}}{\infty}$") Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť

$$\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$$

a nechť existuje

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogická tvrzení platí pro limity zleva.

Věta 3 (O limitě derivací)**.** Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a a nechť $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.

Derivace:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\mathrm{arcctg})' = \frac{-1}{1+\mathrm{x}^2}$$
$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$
$$a^b = e^{b \ln a}$$

Příklady

0. příklad, aneb co bylo na cvičení špatně. Spočtěte derivace následující funkce:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & |x| \le 1 \\ \frac{\pi}{4}\mathrm{sgnx} + \frac{\mathrm{x}-1}{2} & |x| > 1 \end{cases}$$

Řešení: Prvně si funkci nakreslíme. A co zjistíme, že v bodě 1 je spojitá, kdežto v bodě -1 má skok. ($\arctan 1 = \pi/4$, $\arctan -1 = -\pi/4$.)

Nyní spočteme derivace rutinním způsobem tam, kde to snadno půjde.

- pro $|x| < 1$ máme
$$f(x)' = \arctan x' = \frac{1}{1+x^2}$$
- pro $x > 1$ máme
$$f(x)' = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$
- pro $x < 1$ máme
$$f(x)' = \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

A nyní dopočteme derivace v hraničních bodech.

- v bodě 1 je funkce spojitá z obou stran, užijeme tedy větu (viz Teorie)
$$f_-(1)' = \arctan'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$
$$f_+(1)' = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right)'(1) = \frac{1}{2}$$

- v bodě -1 je funkce spojitá zprava, použijeme větu

$$f_+(-1)' = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right)'(-1) = \frac{1}{2}$$

zleva ovšem spojitá není, a jelikož je tam skok, nezbude, než to vzít přes definici, počítáme tedy:

$$f_-(-1)' = \lim_{h\to 0-} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-\frac{\pi}{4} + \frac{-1-h-1}{2} - \frac{-\pi}{4}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0-} \frac{-h-2}{2h} == \lim_{h\to 0-} -\frac{1}{2} + \frac{-1}{h} \stackrel{VOAL}{=} -\frac{1}{2} + \infty = \infty$$

Pozor na to, že funkce jde k nule zleva.

Nyní porovnáme s obrázkem, co jsme si nakreslili a zjistíme, že je to dobře, protože v -1 má funkce skok směrem nahoru. Závěr je, že v -1 existují jen jednostranné derivace a nerovnají se. A kde byla ta chyba? Nepoužívejte věty, kde neověříte předpoklady, doufám, že si z mého odstrašujícího příkladu vezmete příklad.

Pomocí L'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

Řešení: Sinus v 0 je 0, sinus a0 a b0 taky, tedy typ "0/0" a snadno užít L'Hospitala.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot\cos ax}{b\cdot\cos ax} \stackrel{VOAL}{=} \frac{a}{b}\frac{\lim_{x\to 0}\cos ax}{\lim_{x\to 0}\cos bx} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}$$

Použili jsme Dci složené funkce (sin ax), VOLSF (cos je spojitý), VOAL. Je dobré si ujasnit, že $b \neq 0$, jinak ten výrazjiž od začátku nedává smysl.

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$$

Řešení: Tady by zjevně bylo rychlejší limitu rozložit podle známých vzorců. Ale L'Hospitalem to půjde také. Typ je "0/0".

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x^2}{2x\cdot\sin x^2+x^2\cdot 2x\cdot\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin x^2+x^2\cdot\cos x^2}\overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{2x\cos x^2+2x\cos x^2-x^2\cdot 2x\cdot\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{\cos x^2+\cos x^2-x^2\cdot\sin x^2}\overset{VOAL}{=}$$

$$\frac{1}{1+1-0}=\frac{1}{2}$$

Použili jsme dvakrát L'Hospitala, oba typy "0/0", derivovali jsme složenou funkci (vše je krásně spojité) a součin (totéž), VOAL už je obligátní.

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$$

Řešení: Uvědomíme si, že arkussinus nabývá v 0 nulové hodnoty a hurá na typ "0/0".

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}\overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\frac{2\cdot(-4)\cdot 2x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2\cdot(-2)x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{3\cdot 2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\frac{2\cdot(-4)\cdot 2}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2\cdot(-2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{3\cdot 2}\overset{VOAL}{=}\frac{\frac{8}{\sqrt{1}}-\frac{2}{\sqrt{1}}}{6}$$

$$=1$$

Důležité je neroztrhnout hned ten druhý zlomek, který nám vyjde (vycházelo by $\infty-\infty$), pak už jen nenasekat chyby při derivování těch odmocnin a nezapomenout na vnitřní funkci. Z tohohle příkladu je dobré si odnést jakousi "předtuchu", kdy použít derivování. Když si totiž prohlédneme x^2 uvnitř odmocnin, tak si všimneme, že nám derivace vystěhuje jedno x ven, a že toto x se sežere s tím, které vyleze ve jmenovateli. Je to trošku magie…

4.

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$$

Řešení: Nejprve zlomek obvyklým způsobem rozepíšeme.

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}\ \lim_{x\to 1}e^{1/(1-x)\cdot\ln x}$$

Dále pokračujeme dle věty o limitě složené funkce (exponenciála je spojitá) a L'Hospitalíme, typ "0/0".

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

Celkem máme e^{-1}.

5.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

Řešení: Nejprve rutinně přepíšeme.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}$$

Dle limity složené fce řešíme jen vnitřní funkci. Tedy nás zajímá

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

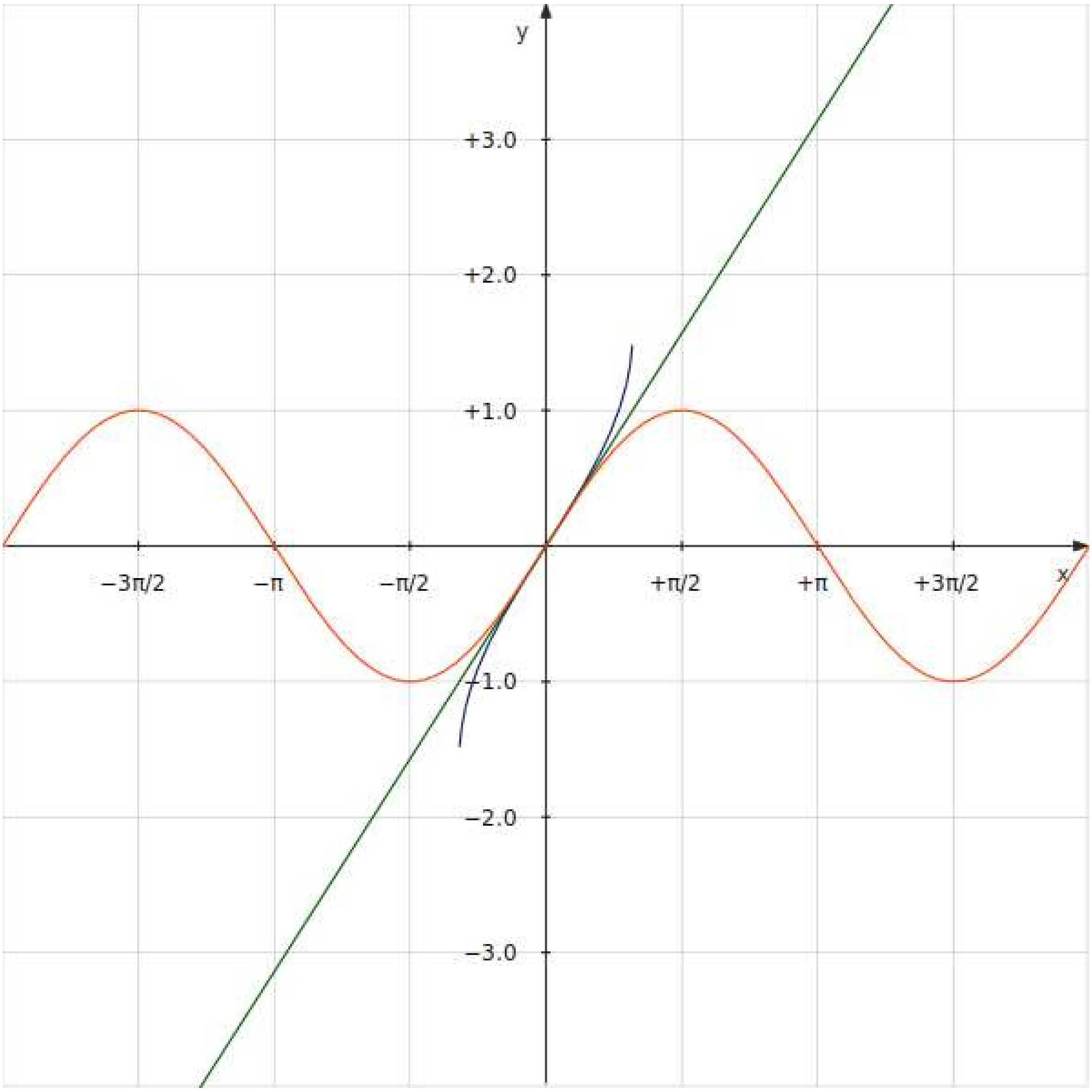
a víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$ a prostě si půjčíme a vrátíme. Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}{\frac{\arcsin x}{x}-1}\cdot\frac{\arcsin x - x}{x}$$

Nyní se podíváme na limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}{\frac{\arcsin x}{x}-1}.$$

Známe limitu pro logaritmus $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ a víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$, tedy použijeme větu o limitě složené fce. Podmínky nám dá vnitřní funkce, protože $\arcsin x = x$ jedině v 0 (prohlédněte si průběh sinu, arkussinu a x), takže na prstencovém okolí nenabývá své limity.



Tuto limitu jsme tedy vyřešili a budeme se věnovat zbytku. Zde je čas na L'Hospitala.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{6}$$

Dosadíme zpět:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}{\frac{\arcsin x}{x} - 1} \cdot \frac{\arcsin x - x}{x} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{1}{6}$$

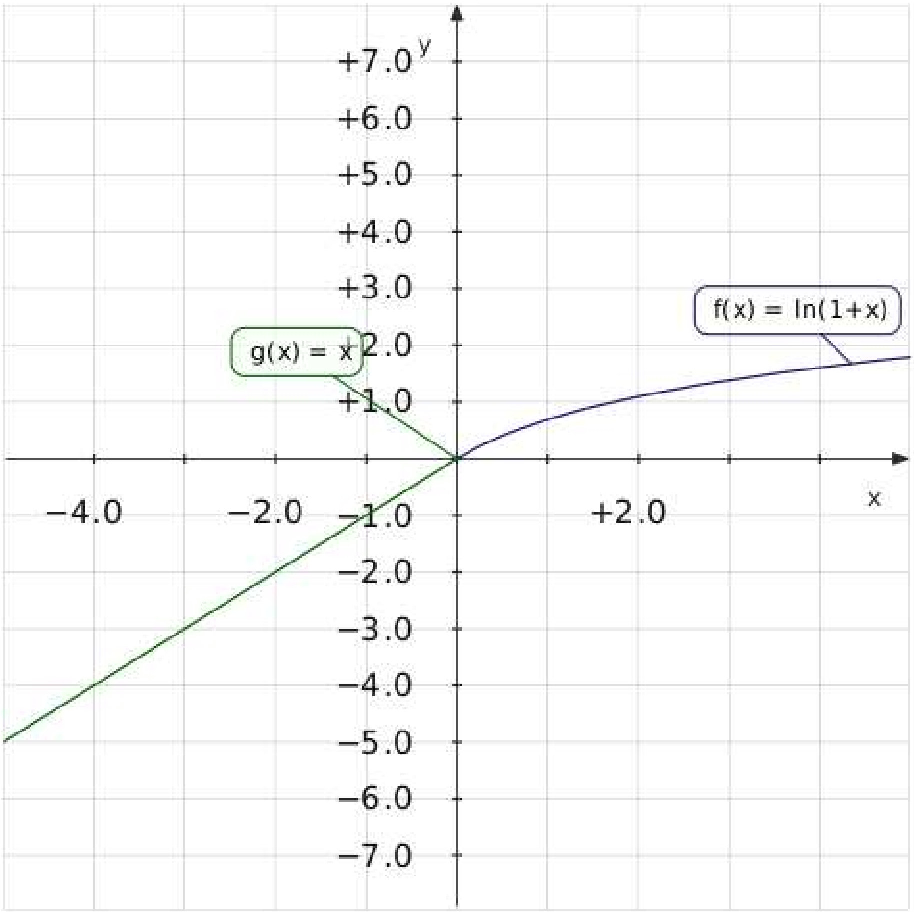
Zbývá dosadit do celé funkce, výsledek je $e^{1/6}$.

Najděte (jednostranné) derivace následujících funkcí

6.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$$

Řešení:



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & x > 0 \end{cases}$$

Zbývá 0, funkce je tam spojitá, tedy dle věty o limitě derivací:

$$\lim_{x \to 0+} x' = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \ln(1+x)' = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x} = 1$$

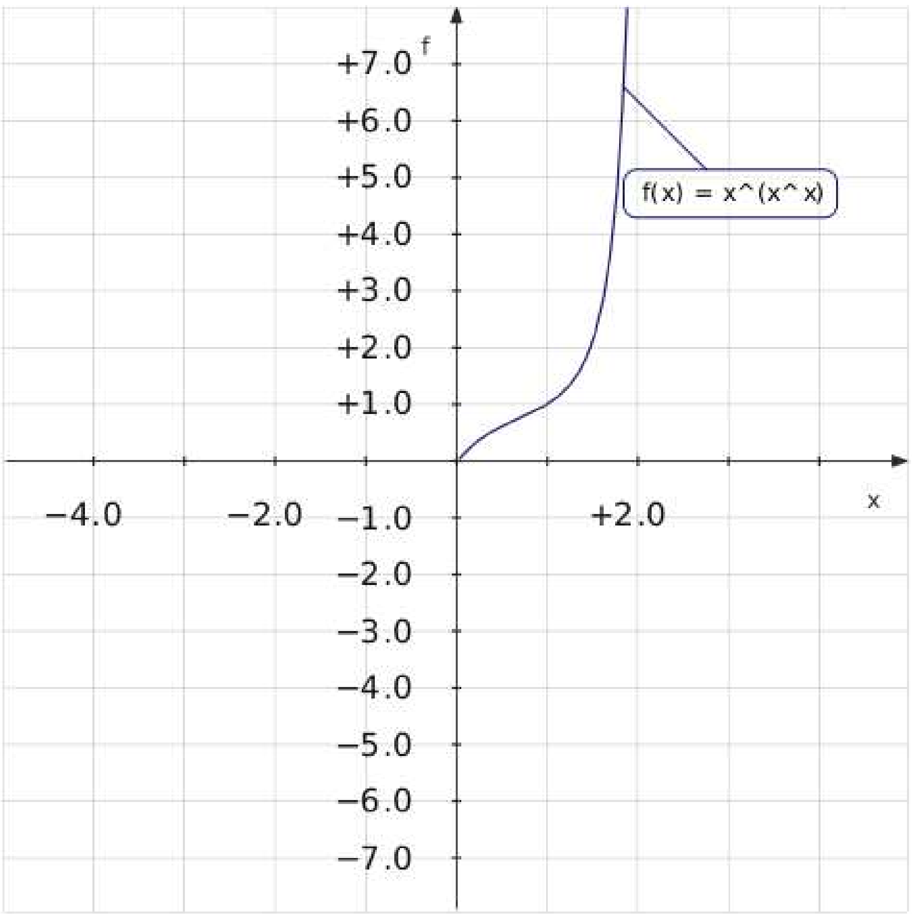
Levá i pravá dce se rovnají, tedy $f'(0) = 1$.

7.

$$f(x) = x^{(x^x)}$$

Řešení: Prvně funkci přepíšeme a pak promyslíme podmínky.

$$f(x) = x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x} = e^{\ln x \cdot e^{x \ln x}}$$



Opakovaně máme x v logritmu, tedy $x > 0$. Dále derivujeme složenou funkci:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left(x^{(x^x)}\right)' = \left(e^{x^x \ln x} = e^{\ln x \cdot e^{x \ln x}}\right)' = \left(e^{\ln x \cdot e^{x \ln x}}\right) \cdot \left(\ln x \cdot e^{x \ln x}\right)' = \\
\left(e^{\ln x \cdot e^{x \ln x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot e^{x \ln x} + \ln x \left(e^{x \ln x}\right)'\right)' = \\
\left(e^{\ln x \cdot e^{x \ln x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot e^{x \ln x} + \ln x \left(e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'\right)\right)' = \\
\left(e^{\ln x \cdot e^{x \ln x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot e^{x \ln x} + \ln x \left(e^{x \ln x} \cdot (1 + \ln x)\right)\right)' = \\
x^{(x^x)} \cdot \left(\frac{x^x}{x} + \ln x \cdot x^x (\ln x + 1)\right)
\end{aligned}
$$

Použili jsme aritmetiku derivací a dci složené funkce. To vše jsme mohli udělat proto, že je tu spojité téměř všechno, k tomu nám pomůžou věty z přednášky o spojitosti logaritmu, polynomů a věty o spojitosti složené funkce, násobku, součtu a podílu (s podmínkou, že v čitateli nevychází 0).

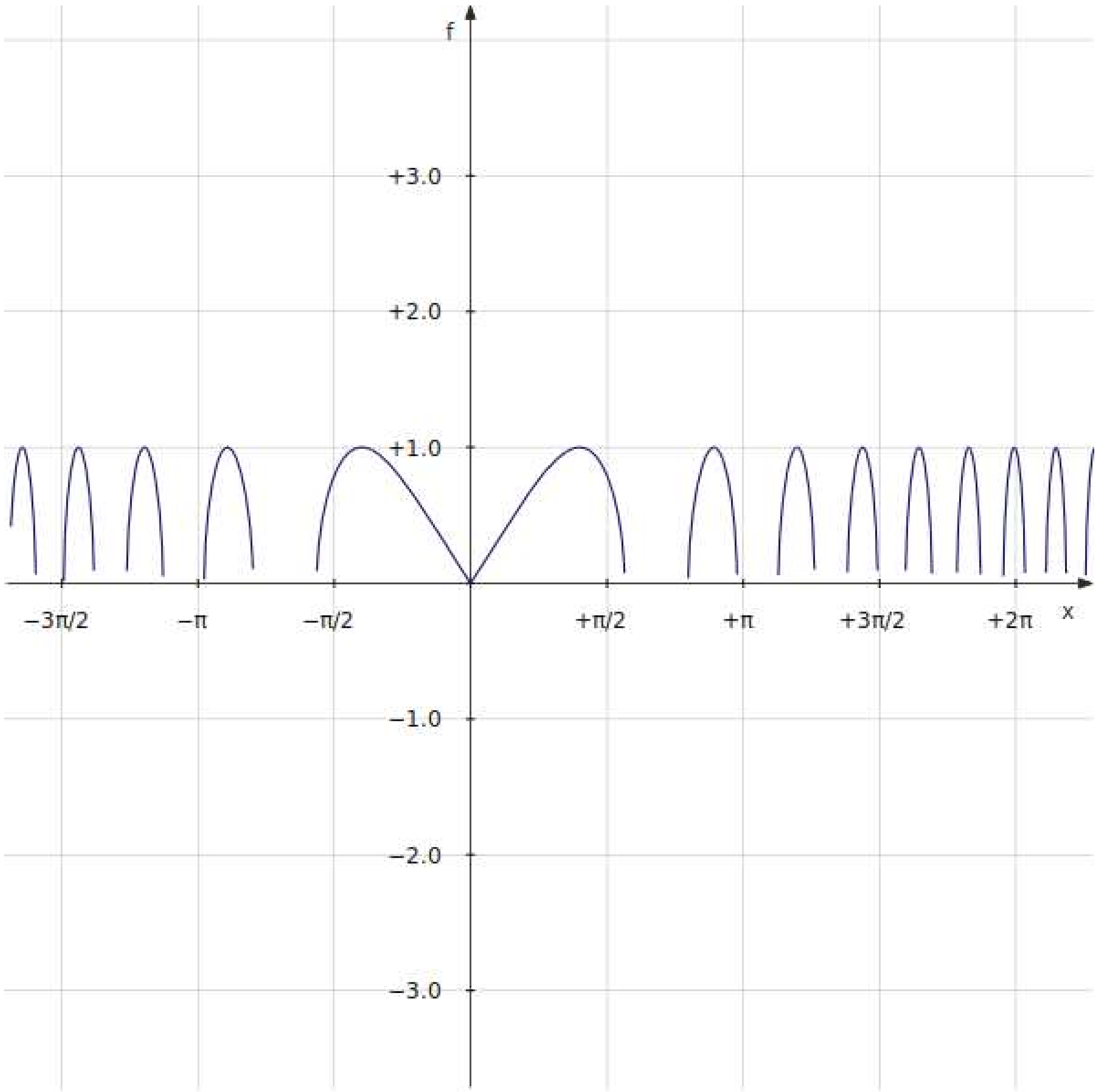
Derivaci v 0 zprava počítat nebudeme, neb tam funkce není definovaná.

8.

$$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$$

Řešení: Nejprve zderivujeme a pak budeme rozebírat problémy:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sin x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$



A nyní ty potíže, výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tedy první podmínka: $\sin x^2 \geq 0$ tedy $x^2 \in [0, \pi] + 2k\pi$, tedy $|x| \in [\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi}]$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Výsledek derivování nám ještě dá podmínku na nenulovost jmenovatele, tedy dohromady: $|x| \in (\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi})$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Toto jsou problémové body, kde budeme hledat derivaci zvlášť. Mimo tyto body a tam, kde je funkce definovaná, je funkce ovšem spojitá (v krajních bodech jen zleva nebo jen zprava). Takže můžeme užít větu o limitě derivací, tedy pro $k \neq 0$:

$$f'_+(\sqrt{2k\pi}) = \lim_{x\to\sqrt{2k\pi}+} \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = \infty$$

$$f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \lim_{x\to\sqrt{(2k+1)\pi}-} \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = -\infty$$

Tyto výpočty je třeba řádně promyslet a odůvodnit! (Proč jednou je limita zprava a pak zleva a proč vychází různá nekonečna). Zbývá 0, tedy:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} \overset{VOAL}{=} \lim_{x\to 0+} \cos x^2 \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{\sin x^2}} =$$

$$1 \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^2}} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{\sin x^2}} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

Analogicky:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} \overset{VOAL}{=} \lim_{x\to 0-} \cos x^2 \cdot \lim_{x\to 0-} \frac{x}{\sqrt{\sin x^2}} =$$

$$1 \cdot \lim_{x\to 0-} \frac{x}{\sqrt{x^2}} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{\sin x^2}} \overset{VOAL}{=} -1 \cdot 1$$

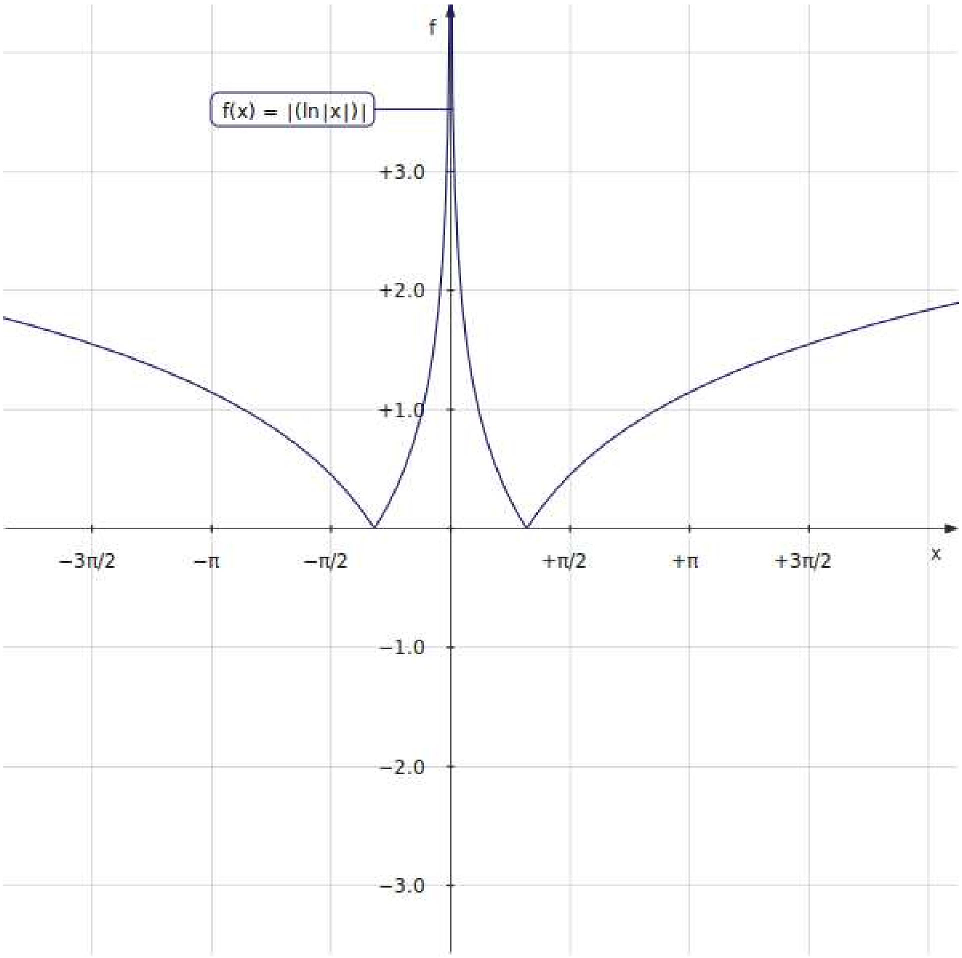
$$\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{\sin x^2}} \overset{VOAL}{=} -1 \cdot 1$$

$$= -1$$

9.

$$f(x) = |\ln |x||$$

Řešení: Prve funkci rozepíšeme, jak vlastně vypadá:



$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x \geq 1 \\ -\ln x & x \in (0, \infty) \\ -\ln(-x) & x \in (-1, 0) \\ \ln(-x) & x \leq -1 \end{cases}$$

A nyní derivujeme:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{x} & x \in (0, \infty) \\ -\frac{1}{x} & x \in (-1, 0) \\ \frac{1}{x} & x < -1 \end{cases}$$

V bodech 1 a -1 je fce zleva i zprava spojitá, použijeme tedy větu o limitě dcí:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x} = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{-1}{x} = 1$$

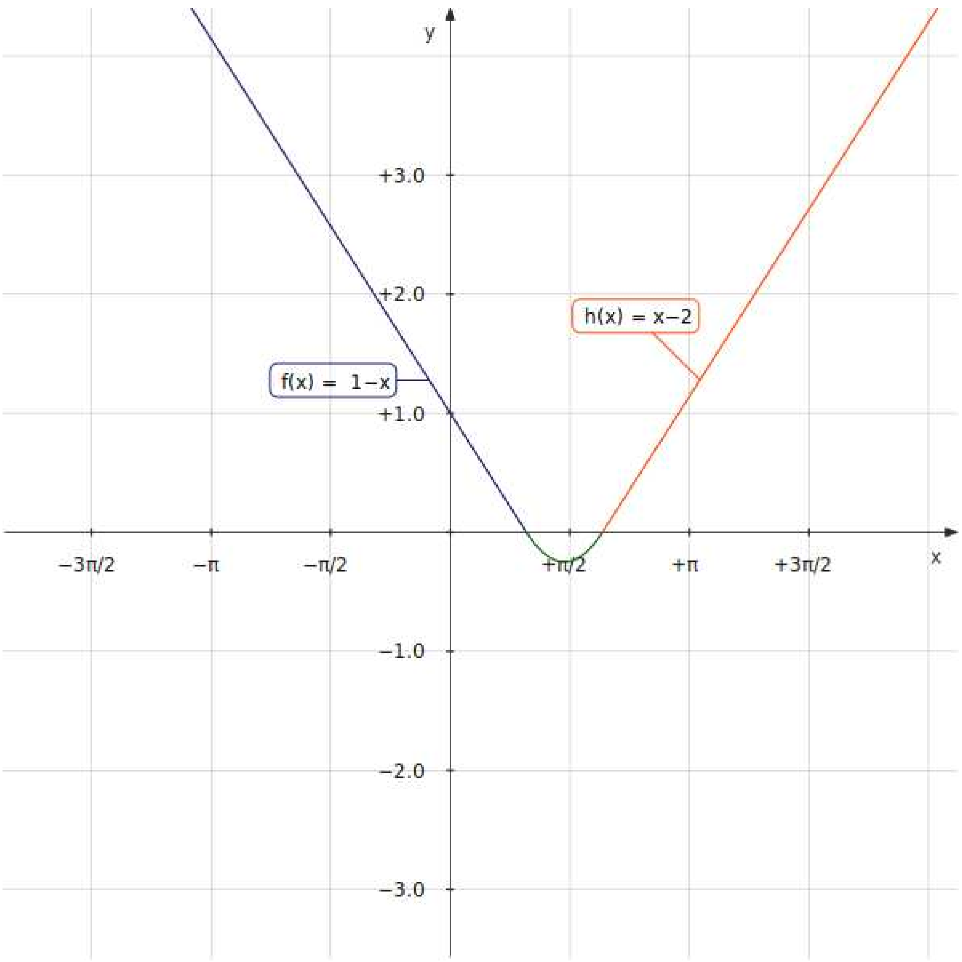
$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} \frac{1}{x} = -1$$

V 0 nic počítat nebudeme. Proč? Protože funkce tam není definovaná. Tedy derivace neexistuje, protože do limity, která derivaci definuje, bychom neměli co dosadit.

10.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \le x \le 2 \\ -(2-x) & x > 2 \end{cases}$$

Řešení: Postup stále stejný, funkce je zleva i zprava spojitá (funkce jde v limitě ke své funkční hodnotě), tedy:



$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2x - 3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

a aplikujeme větu:

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} -1 = -1 = \lim_{x \to 1+} 2x - 3 = f'_+(1)$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2+} 2x - 3 = 1 = \lim_{x \to 2-} 1 = f'_-(2)$$

11. Nalezněte A, $B \in \mathbb{R}$, aby na $\mathbb{R}$ platilo:

$$\left[A + x - \arctan x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x\right)(\ln(1+x^2) - 1)\right]' = (Ax - B)(\arctan x)\ln(1+x^2)$$

Řešení: Derivujeme

$$\left[A + x - \arctan x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x\right)(\ln(1+x^2)-1)\right]' =$$

$$1 - \frac{1}{1+x^2} + \left[\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x\right]'(\ln(1+x^2)-1) +$$

$$\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x\right]\left(\frac{1}{1+x^2}2x\right) =$$

$$1 - \frac{1}{1+x^2} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan x \cdot 2x + \frac{1}{2}(1+x^2)\frac{1}{1+x^2}\right](\ln(1+x^2)-1) +$$

$$x\arctan x - \frac{x^2}{1+x^2} =$$

$$\arctan x \cdot \ln(1+x^2) = (0 \cdot x + 1)\arctan x \cdot \ln(1+x^2)$$

Co je třeba si uvědomit: A a B jsou obyčejné konstanty, při derivování zmizí. Při derivování užita aritmetika derivací a derivace složené funkce, je dobré vědět, že je spojité úplně všechno (věty o spojitosti z přednášky).