12.cvičení

17.12.2009

Teorie

Věta 1 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 2 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** (a) (*verze* "$\frac{0}{0}$") Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$$

a nechť existuje

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) (*verze* "$\frac{\text{cokoli}}{\infty}$") Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť

$$\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$$

a nechť existuje

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogická tvrzení platí pro limity zleva.

Věta 3 (O limitě derivací)**.** Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě a a nechť $\lim_{x \to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.

Derivace:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg})' = \frac{-1}{1+\mathrm{x}^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Příklady

Pomocí L'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$$

4. $$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$$

5. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

Najděte (jednostranné) derivace následujících funkcí

6. $$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$$

7. $$f(x) = x^{(x^x)}$$

8. $$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$$

9. $$f(x) = |\ln|x||$$

10. $$f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & x > 2 \end{cases}$$

11. Nalezněte A, $B \in \mathbb{R}$, aby na $\mathbb{R}$ platilo:

$$\left[A + x - \arctan x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x\right)(\ln(1+x^2)-1)\right]'$$
$$= (Ax - B)(\arctan x)\ln(1+x^2)$$