11.cvičení

10.12.2009

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $(f^{-1})'(b) = \infty$ (respektive $(f^{-1})'(b) = -\infty$).

Derivace:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg})' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Příklady

Spočtěte derivace následujících funkcí $f(x)$

1.

$$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

Řešení: Použijeme aritmetiku derivací (AD) a poučku: $x^{n\prime} = nx^{n-1}$, tedy

$$(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' \overset{AD}{=} 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Nezapomeneme na podmínky: $x > 0$ (kvůli druhé odmocnině a jmenovateli).

2.

$$\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Řešení: Totéž:

$$(\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}})' = (x^{2/3} - 2x^{-1/2})' \overset{AD}{=} \frac{2}{3}x^{2/3-1} - 2\cdot(-\frac{1}{2})x^{-1/2-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Podmínky: $x > 0$.

3.

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Řešení: Budeme derivovat podíl a navíc složenou funkci. Tak tedy:

$$(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}})' \overset{AD}{=} \frac{x'\sqrt{a^2-x^2} - x\sqrt{a^2-x^2}'}{\sqrt{a^2-x^2}^2}$$

Nyní si zderivujeme složenou funkci, vnější funkce bude $f(y) = \sqrt{y}$, a vnitřní $g(x) = a^2 - x^2$, která je navíc spojitá na celém $\mathbb{R}$.

$$f(y)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$g(x)' = -2x$$

nezapomeneme, že a je konstanta a její dce je tudíž nulová, celkem

$$f(g(x))' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

Nyní se můžeme vrátit k původnímu výrazu:

$$\frac{x'\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - x^2}'}{\sqrt{a^2 - x^2}^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

Podmínky: : $a^2 - x^2 > 0$ (pod odmocninou a ve jmenovateli), tedy $|a| > |x|$.

4.

$$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Řešení: Složená funkce, vnější $f(y) = \ln y$ a vnitřní $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, spojitá až na $x = \pm 1$, takže:

$$f(y)' = \frac{1}{y}$$

a

$$g(x)' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

tady jsme použili větu o derivování podílu (má podmínky, které jsme ovšem pořešili o dva řádky výše). Celekem:

$$\left(\frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' \overset{SD}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

Podmínky: $x \neq \pm 1$, neb se vyskytuje ve jmenovateli s -1. Ale navíc máme ještě výraz uvnitř logaritmu, který musí být kladný. Tedy:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0,$$

což dává podmínku: $|x| > 1$.

5.
$$e^x(x^2-2x+2)$$

Řešení: Tady se seznámíme s e^x a otestujeme aritmetiku derivací. Tedy:

$$(e^x(x^2-2x+2))' \stackrel{AD}{=} e^{x\prime}(x^2-2x+2)+e^x(x^2-2x+2)' = \\ e^x(x^2-2x+2)+e^x(2x-2) = e^x \cdot x^2$$

Věta použita, neb e^x je spojité všude.

6.
$$\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$$

Řešení: Dce podílu a zároveň součinu:

$$\left(\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}\right)' \stackrel{AD}{=} \frac{[x^{p-1}(1-x)^q + x^p q(1-x)^q(-x)](1+x) - x^p(1-x)^q \cdot 1}{(1+x)^2}$$

Podmínky: $x \neq -1$, pro případ, kdy $p < 0$ nebo $q < 0$ nutno ještě přidat podmínky: $x \neq 0$, $x \neq 1$, což nám zároveň zaručí spojitost pro podmínky věty.

7.
$$x^x$$

Řešení: Tady nutno nejprve rozepsat a až poté derivovat:

$$x^x = e^{x\ln x}.$$

To je složená funkce, tedy: $f(y) = e^y$, $f(y)' = e^y$ a $g(x) = x\ln x$ a $g(x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ (derivace součinu, x je spojité na celém $\mathbb{R}$). Celkem máme:

$$(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Jelikož se x vyskytuje v logaritmu, tak $x > 0$. Jinak x i $\ln x$ jsou spojité a jejich součin je také spojitý, máme podmínky věty.

8.
$$\ln(\ln^2(\ln^3 x))$$

Řešení: Úloha na víceré užití složené funkce, začneme od začátku: $f(y) = \ln y$, $f(y)' = \frac{1}{y}$, $g(x) = \ln^2(\ln^3 x)$, s její derivací počkáme. Takže máme:

$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))'$$

věnujme se zbylé derivaci, vnější funkce $f(y) = y^2$, $f(y)' = 2y$ a vnitřní $g(x) = \ln(\ln^3 x)$. Celkem:

$$(\ln^2(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=} 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))'.$$

Dále, vnější $f(y) = \ln y$, $f(y)' = \frac{1}{y}$ a vnitřní $g(x) = \ln^3 x$, derivace se uvidí za chvíli. Získali jsme:

$$(\ln(\ln^3 x))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)'$$

Pokračujeme, vnější $f(y) = y^3$, $f(y)' = 3y^2$ a vnitřní $g(x) = \ln x$, $g(x)' = \frac{1}{x}$, celkem

$$(\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$$

Takže celé dohromady to je:

$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))' \overset{SD}{=}$$
$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' \overset{SD}{=}$$
$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln(\ln^3 x)\ln x}$$

Věty jsme používali bez předpokladů, je potřeba je doplnit. Polynomy i logaritmy jsou spojité na svém definičním oboru, takže ten musíme určit. Z logaritmů máme

$$\ln^2(\ln^3 x) > 0$$
$$|\ln^3 x| > 1$$
$$\ln x > 1$$
$$x > e.$$

9.

$$\sin(\sin(\sin x))$$

Řešení: Toto je složená funkce, ovšem o poznání hezčí, než ta minulá. Takže už bez detailů

$$(\sin(\sin(\sin x)))' \overset{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' \overset{SD}{=}$$
$$\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' \overset{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\cos x)$$

Jelikož spojité je tady všechno, kam se kdo podívá (skládáme spojité funkce), tak podmínky věty splněny.

10.

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

Řešení: derivujeme podíl a ještě dvě složené funkce. Nejprve podíl (vše je spojité):

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \overset{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x (\sin x^2)'}{\sin x^2}$$

a nyní se podíváme na ty složené fce: první případ – $\sin^2 x$, vnější $f(y) = y^2$, $f(y)' = 2y$ a vnitřní $g(x) = \sin x$, $g(x)' = \cos x$, sinus je spojitý, dohromady $(\sin^2 x)' \overset{SD}{=} 2 \sin x \cdot \cos x$.

druhý případ – $\sin x^2$, vnější $f(y) = \sin y$, $f(y)' = \cos y$, vnitřní $g(x) = x^2$, $g(x)' = 2x$. Polynomy jsou spojité, máme tedy dohromady

$(\sin x^2)' \overset{SD}{=} \cos x^2 \cdot 2x$

Dosadíme zpět a máme:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \overset{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x (\sin x^2)'}{\sin x^2} \overset{SD}{=} \frac{2 \sin x \cos x \sin x^2 - \sin^2 x \cos x^2 2x}{\sin x^2}$$

Podmínky: ve jmenovateli nesmí být nula, tedy $x^2 \neq k\pi$.

11.

$$2^{\tan \frac{1}{x}}$$

Řešení: Nejprve přepíšeme

$$2^{\tan \frac{1}{x}} = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}$$

a uvědomíme si, že $\ln 2$ je úplně obyčejná konstanta ten zbytek je složená funkce. Máme vnější funkci $f(y) = e^y$, $f(y)' = e^y$, vnitřní $g(x) = \ln 2 \tan \frac{1}{x}$, spojitost vyřešíme za chvíli a máme:

$$\left(e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}\right)' = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2} \cdot \left(\ln 2 \tan \frac{1}{x}\right)'$$

Násobením konstantou si neděláme hlavu. Opět složená funkce, vnější $f(y) = \tan y$, $f(y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ vnitřní $g(x) = \frac{1}{x}$, $g(x)' = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ je spojitá mimo nulu, celkem $\left(\tan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$ takže máme:

$$\left(e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}\right)' = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2} \cdot \left(\tan \frac{1}{x}\right)' = 2^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

Podmínky: $\frac{1}{x} \neq 0$ a kvůli tangens $\frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cestou jsme potřebovli spojitost $\tan\frac{1}{x}$, což jsme právě pořešili, neb jsme vyhodili nepěkné a zlé body, které nám spojitost kazí. Jinde je tangens (po určitých intervalech !) spojitý, což stačí, protože nám stačí spojitost na okolí.

12.

$$\arcsin(\sin x)$$

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že $\arcsin(\sin x) \neq x$, protože když jsme si povídali o arkussinus, tak jsme to popisovali jako: něco jako inverzi. Slova "něco jako", jsou tu dost důležitá. Kdyžtak si udělejte obrázek. Nyní k derivaci.

Složená funkce, vnější $f(y) = \arcsin y$, $f(y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ a vnitřní $g(x) = \sin x$, $g(x)' = \cos x$, sinus je spojitý na celém $\mathbb{R}$, tedy

$$(\arcsin(\sin x))' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

Tady se vrátíme k úvaze ze začátku, kdyby se funkce rovnala identitě (x), tak by její derivace byla 1, ale ona není. závisí na znaménku kosinu.

Podmínky: arkussinus je definován jen na intervalu $[-1;1]$, čili v krajních bodech má jen jednostranné derivace, a na jejich okolí není definován (jen z jedné strany), tedy nutno vyhodit body, kde $\sin x = \pm 1$, tedy $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ke $k \in \mathbb{Z}$. S touto podmínkou koresponduje i podmínka ze jmenovtele derivace $\sqrt{1-\sin^2 x}$.

13.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$$

Řešení: Konstanta nas nezmate a dáme se do složené funkce: vnější $f(y) = \operatorname{arcctg} y$, $f(y)' = \frac{-1}{1+y^2}$ a vnitřní $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $g(x)' = \sqrt{2}\frac{-1}{x^2}$, g je spojitá mimo 0, takže:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}\right)' \overset{SD}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{2}{x^2}}\sqrt{2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2+x^2}$$

Podmínky: už jsme pořešili, takže jen rekapitulace: $x \neq 0$.

14.

$$x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$$

Řešení: Aritmetika derivací:

$$(x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x)' \overset{AD}{=} (x(\arcsin x)^2)' + (2\sqrt{1-x^2}\arcsin x)' - (2x)'$$

jednotlivé sčítance pořešíme zvlášť. Uděláme si přípravu pomocí složené funkce. Nejprve $f(y) = y^2$, $f(y)' = 2y$, vnitřní $g(x) = \arcsin x$, $g(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, g je spojitá na svém definičním oboru, dohromady: $((\arcsin x)^2)' \overset{SD}{=} 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dále, vnější $f(y) = \sqrt{y}$, $f(y)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$ vnitřní $g(x) = 1 - x^2$, je spojitá na celém $\mathbb{R}$, $g(x)' = -2x$, celkem $(\sqrt{1-x^2})' \overset{SD}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$.

Nyní jsme připraveni to celé dát dohromady. Takže

$$
\begin{aligned}
(x(\arcsin x)^2)' + (2\sqrt{1-x^2}\arcsin x)' - (2x)' &\overset{AD}{=} \\
x'(\arcsin x)^2 + x((\arcsin x)^2)' + 2(\sqrt{1-x^2})'\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)' - 2 &\overset{SD}{=} \\
1 \cdot (\arcsin x)^2 + 2x\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\arcsin x \\
+2\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 &= \\
\arcsin x(\arcsin x + \frac{2x-2x}{\sqrt{1-x^2}}) &= \arcsin^2 x.
\end{aligned}
$$

Podmínky: vyplývají z definice arkussinu, $x \in [-1;1]$, krajní body vyjmeme, jednak kvůli výskytu x ve jmenovateli zlomků a jednak proto, že tam arkussinus má jen jednostranné dce.

15.

$$\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\mathrm{ctgh}\frac{x}{2}\right)$$

Řešení: Opět si připravíme složené funkce předem. Nejprve vnější $f(y) = y^2$, $f(y)' = 2y$ a vnitřní $g(x) = \sinh x$, $g(x)' = \cosh x$, je spojité na célém $\mathbb{R}$, dohromady $(\sinh^2 x)' = 2\sinh x \cosh x$.

Další složenou fcí je vnější $f(y) = \ln y$, $f(y)' = \frac{1}{y}$ a vnitřní $g(x) = \mathrm{ctgh}x$, $g(x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$, g je definována a spojitá na $\mathbb{R}$ bez 0. Dohromady máme $(\ln(\mathrm{ctgh}x))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\mathrm{ctgh}x} \cdot \frac{-1}{\sinh^2 x}$

Dále vnější $f(y) = \mathrm{ctgh}y$, $f(y)' = \frac{-1}{\sinh^2 y}$ a vnitřní $g(x) = \frac{x}{2}$, $g(x)' = \frac{1}{2}$, polynom je spojitý na celém $\mathbb{R}$. Dohromady máme

$$\left(\mathrm{ctgh}\frac{x}{2}\right)' = \frac{-1}{\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Hurá na celou funkci. Dle aritmetiky dcí a dce složené fce

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\mathrm{ctgh}\frac{x}{2}\right)\right)' &= \\
\frac{\sinh^3 x - \cosh x \cdot 2\sinh x\cosh x}{\sinh^4 x} - \frac{1}{\mathrm{ctgh}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sinh^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

Chybí nám podmínky, tedy: $\sinh x \neq 0$, tedy $x \neq 0$. Navíc kvůli logaritmu $\mathrm{ctgh}\frac{x}{2} > 0$, což jest $x > 0$.

Jestliže máte pocit, že jsem se s těmito funkcemi zbláznila, protože jste je nikdá neviděli, máte pravdu. Ve zkoušce s nimi počítat nebudete. Ale proč se nenaučit něco nového, že.