11.cvičení

10.12.2009

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $(f^{-1})'(b) = \infty$ (respektive $(f^{-1})'(b) = -\infty$).

Derivace:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\mathrm{arcctg})' = \frac{-1}{1+\mathrm{x}^2}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$
$$a^b = e^{b \ln a}$$

Příklady

Spočtěte derivace následujících funkcí $f(x)$

1. $$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$
2. $$\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
3. $$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$
4. $$\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$$
5. $$e^x(x^2 - 2x + 2)$$
6. $$\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$$
7. $$x^x$$
8. $$\ln(\ln^2(\ln^3 x))$$
9. $$\sin(\sin(\sin x))$$
10. $$\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$
11. $$2^{\tan \frac{1}{x}}$$
12. $$\arcsin(\sin x)$$
13. $$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{arcctg} \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{x}}$$
14. $$x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$$
15. $$\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\mathrm{ctgh} \frac{\mathrm{x}}{2}\right)$$