10.cvičení

3.12.2009

Teorie

Věta 1 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) f je spojitá v A;

(P2) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Hinty:

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sqrt[2]{x} = x^{1/2}$$

Příklady

1.

$$\lim_{x\to 0} x\cot 3x$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} x\cot 3x = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos 3x}{\sin 3x} \overset{VOAL}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x \overset{VOLSF}{=} \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Věta o limitě složené funkce se užije na: $g(x) = 3x$ a $f(y) = (\sin y)/y$, kde funkce g se na okolí 0 vyhýbá své limitě (ona se tedy té limitě, což je jmenovitě 0, vyhýbá všude). Čili poskládáme funkci: $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, tedy $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, konkrétně: $\lim_{x\to 0} 3x = 0$, $\lim_{x\to 0}(\sin y)/y = 1$ a $\lim_{x\to 0}(\sin 3x)/3x = 1$.

2.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a}$$

Řešení: Rádi bychom viděli zlomek tvaru $[\sin(x-a)]/(x-a)$, nu tak nezbývá, než si rozepsat:

$$\sin x = \sin(x-a+a) = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$$

a dosadit:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos a}{x-a} + \frac{(\sin a)(\cos(x-a)-1)}{(x-a)^2}(x-a) \overset{VOAL}{=}$$
$$1\cdot\cos a + \sin a\cdot\frac{-1}{2}\cdot 0 = \cos a$$

Větu o složené funkci jsme použili hned dvakrát. Nejprve $g(x) = x-a$, $\lim_{x\to a} x-a = 0$, fce se nerovná 0 nikde jinde (tedy ani na prstencovém okolí ne).

$f(x) = (\sin y)/y$, $\lim_{y\to 0}(\sin y)/y = 1$,

celkem $\lim_{x\to a} f(g(x)) = 1$.

A napodruhé:

$g(x) = x-a$, $\lim_{x\to a} x-a = 0$, fce se nerovná 0 nikde jinde (tedy ani na prstencovém okolí ne).

$f(x) = (1-\cos y)/y^2$, $\lim_{y\to 0}(1-\cos y)/y^2 = 1/2$,

celkem $\lim_{x\to a} f(g(x)) = 1/2$.

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^3 x}$$

Řešení: Převedeme na známý tvar.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{1}{\sin x}$$

Rádi bychom použili větu o aritmetice limit, ono to ale nepůjde. Ona totiž limita $\lim_{x\to 0} 1/\sin x$ neexistuje. Takže jsme nesplnili předpoklady té věty (připomeňte si ji) a co teď. Teď si řekneme, že ona ta věta platí i pro jednostranné limity, což je bezva, takže ji použijeme:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{1}{\sin x}\overset{\text{VOAL}}{=}\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\infty=\infty$$

a na druhé straně:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1-\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{1}{\sin x}\overset{\text{VOAL}}{=}\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot -\infty=-\infty$$

Tedy nám vyšly různé jednostranné limity, čili celkem funkce limitu nemá.

4.

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\cos a}}{x-a}\qquad \cos a\neq 0$$

Řešení: Nejprve přepíšeme a pak použijeme formulku: $\cos(x-a+a)=\cos(x-a)\cos a-\sin(x-a)\sin a$. Tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\cos a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos a-\cos x}{(\cos x\cos a)(x-a)}=\frac{\cos a-\cos(x-a)\cos a+\sin(x-a)\sin a}{\cos x\cos a(x-a)}=$$

$$(x-a)\frac{1-\cos(x-a)}{\cos x(x-a)^2}+\frac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a(x-a)}\overset{\text{VOAL}}{=}0\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\cos a}+\frac{1}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}$$

Použili jsme i větu o limitě složené fce, odůvodnění najdete v 2. příkladu.

5.

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: Jako obvykle rozepíšeme:

$$(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}$$

Použijeme VOLSF, vnější funkce je spojitá (!) funkce $f(y)=e^y$ a vnitřní bude $g(x)=\frac{1}{x}\ln(x+e^x)$. Zbývá spočítat $\lim_{x\to 0} g(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln e^x(1+\frac{x}{e^x})=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{x}{e^x})=$$

$$\lim_{x\to 0}1+\frac{1}{e^x}\frac{\ln(1+\frac{x}{e^x})}{\frac{x}{e^x}}\overset{\text{VOAL}}{=}\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{e^x})}{\frac{x}{e^x}}=1+1\cdot 1=2$$

Je nutno ještě dosadit zpět, tedy máme:

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+e^x)} = e^2$$

Povšimneme si ještě druhého užití VOLSF, v limitě

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{e^x})}{\frac{x}{e^x}}$$

Vnější funkce: $f(y) = [\ln(1+y)]/y$, $\lim_{y\to 0} f = 1$, vnitřní je $g(x) = \frac{x}{e^x}$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, a funkce se vyhýbá své limitě, e^x je na okolí 0 kladné (nenulové) a x je nula pouze v 0. Podmínky věty splněny, píšeme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{e^x})}{\frac{x}{e^x}} = 1$$

6.

$$\lim_{x\to 0+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: Rozepíšeme:

$$(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})}$$

a uvažujeme jako výše, stačí spočíst vnitřní limitu:

$$\lim_{x\to 0+} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\frac{\ln(1+(\cos\sqrt{x}-1))}{\cos\sqrt{x}-1}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{1} \overset{\text{VOAL}}{=}$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+(\cos\sqrt{x}-1))}{\cos\sqrt{x}-1}\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} \overset{\text{VOLSF}}{=} -\frac{1}{2}\cdot 1$$

Užita VOLSF, vnitřní fce $g(x) == \sqrt{x}$ a vnější $\frac{1-\cos y}{y^2}$ a $\frac{\ln(1+y)}{x}$. Podmínky si promyslete, stejně tak, proč se limita počítala jen zprava a že VOAL a VOLSF platí i pro jednostranné limity. Celkem máme $e^{-1/2}$.

7.

$$\lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}$$

Řešení: Úvaha bude vypadat asi takto: argument arcussinu jde k minus jedné, čili celková limita půjde k $\arcsin -1 = -\pi/2$. A teď pořádně. VOLSF Vnitřní funkce je

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -1$$

a jde to k -1 zprava (zlomek je pořád větší, než -1). Vnější funkce

$$f(y) = \arcsin y$$

$$\lim_{y \to -1+} f(y) = \frac{-\pi}{2}$$

Arcussinus je spojitý tedy můžeme dosadit a limita celého výrazu je $\pi/2$. Povšimněme si, jak vypadá zápis: jde k -1 zprava (neprohodit znaménka). Také popřemýšlíme, proč potřebujeme jednostrannou limitu: protože arcussinus je definován pouze na intervalu [-1;1] a v krajních bodech má pouze jednostranné limity. Obecně je dobré se seznámit s touto funkcí. a nervat všude tabulkové limity bezhlavě:)

8.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x-2}$$

Řešení: Tady už čas na tabulkovou limitu je. VOLSF:

$$g(x) = x - 2$$

$$\lim_{x \to 2} = 0$$

Fce se vyhýbá své limitě na celém $\mathbb{R}$.

$$f(y) = \frac{\arcsin y}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} f(y) = 1$$

Celkem

$$\lim_{x \to 2} f(g(x)) = 1$$

.

9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\tan x}$$

Řešení: Funkce vypadá příhodně na tabulkové limity, které tam ovšem musíme nějak dostat, tedy do toho:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{\sin 2x} - 1) + (1 - e^{\arcsin x})}{\tan x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{\sin 2x} - 1)}{\sin 2x} \cdot \frac{2 \sin 2x}{2x} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x - \lim_{x \to 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \overset{VOAL}{=}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Několikrát jsme užili VOLSF, tedy komentář: Nejprve sinus:

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}$$

je vnější,

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$g(x) = 2x$$

je vnitřní

$$\lim_{x \to 0} 2x = 0.$$

Celkem

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1.$$

A nyní exp:

$$f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} f(y) = 1$$

$$g(x) = \sin 2x$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Celkem

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1.$$

Další limita

$$f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} f(y) = 1$$

$$g(x) = \arcsin x$$

$$\lim_{x \to 0} = g0$$

Celkem

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1.$$

A poslední je kosinus, který je ovšem spojitý, stačí dosadit. Příklad se také dal řešit přes tabulkovou limitu s tangens, ale to je jen kosmetická úprava:)

10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Řešení: Převedeme na

$$\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}$$

e^y bude vnější spojitá funkce, stačí spočítat limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}\cdot\left[\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\right]\overset{\text{V}OAL}{=}1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot 0\right)=1$$

Celkem po dosazení máme:

$$e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}$$

Opět jsme použili VOLSF: vnější

$$f(y)=\frac{\ln(1+y)}{x}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{x}=1$$

vnitřní

$$g(x)=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1$$

(z aritmetiky limit)

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

celkem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

Limity sinu a kosinu snad netřeba dále rozebírat. (Ale do písemky to nezapomeňte zmínit.)

11.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$$

Řešení: Přepíšeme :

$$\sqrt[x]{1-2x}=(1-2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1-2x)}$$

Argumentujeme jako výše a počítáme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1-2x) = \lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{\ln(1+(-2x))}{-2x} = -2\cdot 1$$

Celkem e^{-2}.

Vnější funkce:

$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{x}$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{x} = 1$$

vnitřní

$$g(x) = -2x$$

vyhýbá se své limitě,

$$\lim_{x\to 0} -2x = 0$$

celkem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(-2x))}{-2x} = 1$$

12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$$

Řešení: Tady je potřeba prostě něco zkusit a doufat, že to vyjde. Universální návod mne bohužel nenapadl:(

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x+\sin x}{1-\cos x+\sin x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x-\cos x)\cdot(1-\cos x+\sin x)}{2\cos x(\cos x-1)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{-x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{2\cdot(1-\cos x+\sin x(1-\cos x))}{x^2} \overset{\text{VOAL}}{=}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{1-\cos x}\cdot 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot 2\left(\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\right) = -1$$

Celý příklad je pouze o vhodném rozšíření zlomku a následných úpravách sinu a kosinu. Jednou jsme si půjčili a vrátili x^2.