9.cvičení

28.11.2009

Teorie

Věta 1 (Heineova.)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 2 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) f je spojitá v A;

(P2) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Limity:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Hinty:

1^∞ je nedefinovaný výraz

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$0 = 1 - 1$$

$$x = 1 + (x - 1)$$

Příklady

Minule jsem tvrdila takový nesmysl, že funkce $\frac{\ln 1+x}{x}$ a $= \frac{e^x - 1}{x}$ jsou v nule spojité. Jistěže nejsou. Vždyť tam nejsou ani definované!!!

1.
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Řešení: Logaritmus si přepíšeme jako

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(1 + x - 1)}{x - 1}$$

a podíváme se na něj jako na složenou funkci. Vnitřní funkce $g(x) = x - 1$, $\lim_{x \to 1} = 0$, navíc se tato funkce vyhýbá své limitě na nějakém prstencovém okolí jedničky (je to lineární funkce,), vnější funkce je $\frac{\ln(1+x)}{x}$ s limitou $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Podle Věty o limitě složené funkce máme:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(1 + x - 1)}{x - 1} = 1$$

.

2.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 3x}}{\ln(1 + x^2)}$$

Řešení: Limitu musíme nejprve vhodně upravit - rozšířit těmi odmocninami:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 3x}}{\ln(1 + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos 2x - 1 - \cos 3x}{(\sqrt{1 + \cos 2x} + \sqrt{1 + \cos 3x}) \ln(1 + x^2)},$$

odmocniny ve jmenovateli už nedělají problémy, takže se budeme věnovat zbylým částem výrazu. Známe limity týkající se kosinu a logaritmu, ale něco nám chybí, tak tedy rozšíříme limitu výrazem x^2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 2x - 1 - \cos 3x}{(\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 3x})\ln(1+x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 2x - 1 - \cos 3x}{x^2} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 3x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 3x}{x^2} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 3x}} +$$

$$+\lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos 2x}{x^2} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 3x}}.$$

Limity nyní upravíme zvlášť:

$$\lim \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = 1,$$

jde o složenou funkci $g(x) = x^2$, $\lim_{x\to 0} = 0$, navíc se tato funkce vyhýbá své limitě na nějakém prstencovém okolí nuly, vnější funkce je $\frac{\ln(1+x)}{x}$ s limitou $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Co na tom, že je to hodnota převrácená, stačí použít Větu o aritmetice limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}} = \frac{1}{1}.$$

Dále

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 9\frac{1+\cos 3x}{(3x)^2} = 9 \cdot \lim_{x\to 0} 9\frac{1+\cos 3x}{(3x)^2} = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

analogicky

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1+\cos 2x}{x^2} = -\frac{4}{2}.$$

Celkem máme dle Věty o aritmetice limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 3x}{x^2} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 3x}} +$$

$$+\lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos 2x}{x^2} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 3x}} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

3.

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$$

Řešení: Součtové vzorce logaritmů:

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \frac{\ln \frac{x}{a}}{a(\frac{x}{a}-1)} = \frac{1}{a} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+[\frac{x}{a}-1])}{\frac{x}{a}-1} = \frac{1}{a}.$$

Užita věta o složené funkci, vnitřní funkce je $\frac{x}{a}-1$, která u a jde k nule a vyhýbá se své limitě a vnější funkce je stará známá $\lim \frac{\ln(1+x)}{x}$.

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

Řešení: Řešení leží jen ve správném rozepsání a rozšíření:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\cos ax - 1)}{\cos ax - 1} \frac{a^2(\cos ax - 1)}{a^2x^2} \frac{b^2x^2}{b^2(\cos bx - 1)} \frac{\cos bx - 1}{\ln(1+\cos bx - 1)} =$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot 1 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Úvahy jsou jako minule, věta o limitě složené funkce, podstatné je, že $\cos ax \overset{x\to 0}{\to} 1$ a že najdeme okolí, kde se té jedničce nerovná (kdyžtak si ho nakreslíme).

5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$$

Řešení: Půjčíme si a vrátíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax - \sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{\sin ax - \sin bx} = \frac{x}{x} \frac{a\frac{e^{ax}-1}{ax} - b\frac{e^{bx}-1}{bx}}{a\frac{\sin ax}{ax} - b\frac{\sin bx}{bx}} =$$

$$\frac{a-b}{a-b} = 1.$$

Vnitřní funkce ax a bx (vyhýbání limitě), vnější:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

6.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$$

Řešení: Je nutné upravit výraz na známý tvar, tedy vytkneme v logaritmu to, co je největší:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\ln e^{2x}\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x + \ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\ln e^{2x} + \ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{x^2}{e^x}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\frac{x^2}{e^x}}}{2x + \frac{x^4}{e^{2x}}\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{e^{2x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{\frac{x^2}{e^x}}}{2 + \frac{x^3}{e^{2x}}\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{e^{2x}}\right)}{\frac{x^4}{e^{2x}}}} == \frac{1+0\cdot 1}{2+0\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Co jsme použili: u předposledního rovnítka VOAL. Předtím větu o složené funkci, podstatné je si uvědomit, že x/e^x jde v nekonečnu k nule a té nuly pro dost velká x nenabývá. Dále je dobré si uvědomit, co čím násobíme a že nám nevycházejí neurčité výrazy:)

7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \quad a>0$$

Řešení: Stačí přepsat a použít větu o složené funkci.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \ln a \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a} = \ln a.$$

Musíme si uvědomit, že $\ln a$ je obyčejné reálné a vcelku nekonfliktní číslo, vnitřní funkce je $x\ln a$, když x jde k nule, tak to ta konstanta příliš nevytrhne, vyhýbá se své limitě, vnější je $(e^y-1)/y$. Žádný zázrak:)

8.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$$

Řešení: Předně si uvědomíme, že limita je tvaru 1^∞ a že to je neurčitý výraz. Ne, že někdo napíše, že je to jednička. Dále limitu přepíšeme na

$$e^{\tan 2x \ln(\tan x)}.$$

Funkce e^y bude spojitá vnější funkce. Tedy stačí spočítat jen limitu vnitřní funkce $\tan 2x \ln\tan x$, kterou se tedy nyní budeme zaobírat.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x \ln(1+\tan x - 1)}{\tan x - 1} \cdot (\tan x - 1) =$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan x - 1)}{\tan x - 1} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot (\tan x - 1)$$

Limitu s logaritmem už známe, vnitřní funkce $\tan x - 1$, pro $x \to \pi/4$ jde k 0, své limitě se vyhýbá, vnější funkce $\frac{\ln 1+x}{x}$, hotovo.

Druhá limita:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot (\tan x - 1) =$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot (\frac{\sin x}{\cos x} - 1) =$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cos x(\sin x - \cos x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x} =$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin x}{(\cos x + \sin x)} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.$$

Ještě zbývá celou funkci poskládat dohromady, tedy

$$e^{\tan 2x \ln(\tan x)} = e^{(1\cdot(-1))} = \frac{1}{e}.$$

9.

$$\lim_{x\to\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1}\right)$$

Řešení: Co potřebujeme, tak vzorec pro součet arctan:

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{y-x}{y+x}$$

Dále:

$$\lim_{x\to\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} x \left(\arctan 1 - \arctan \frac{x}{x+1}\right) =$$
$$\lim_{x\to\infty} x \left(\arctan \frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}}\right) = \lim_{x\to\infty} x \left(\arctan \frac{1}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} \frac{\left(\arctan \frac{1}{2x+1}\right)}{\frac{1}{2x+1}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} = \frac{1}{2} \cdot 1$$

První limitu víme jak řešit (už od posloupností), druhá je složená funkce, vnitřní je $1/(2x+1)$, která jde k 0, které se ale nerovná a vnější je $(\arctan x)/x$, která jde k jedné, když x jde k nule.

10.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

Řešení: Převedeme na známý tvar

$$\lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)},$$

e^y je spojitá, tedy dle věty o složené fci budeme řešit jen "vnitřek".

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \lim_{y\to 1/2}\ln y = -\infty$$

Co jsme použili: jednak opět složenou funkci: vnitřní je $(x+2)/(2x-1)$, v nekonečnu jde k $1/2$, vnější je $\ln y$, který v $1/2$ nabývá bůhvíjaké číslo, co ale víme, tak že záporné (a nekdě daleko za nulou), celkem nám vyjde, že výraz je definovaný a jde k $-\infty$, (pozor na to, máme i záporné nekonečno a občas k němu něco běží, myslet na to:)). Dosadíme do původního výrazu:

$$\lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

11.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Řešení: Převedeme:

$$\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)\right\}.$$

Řešíme vnitřní funkci, exponenciála ja spojitá a tak dále...

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right) &= \frac{1}{x^2}\frac{\ln[1+\frac{\cos x}{\cos 2x}-1]}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right) = \\
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\frac{\cos x}{\cos 2x}-1]}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right) = \\
1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2} = \\
1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)+1-\cos 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}4\frac{1-\cos 2x}{4x^2} = \\
&-\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Celkem máme $e^{3/2}$

12.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$$

Řešení: Tahle limita nevypadá nic moc, s aparátem na posloupnosti si moc nepomůžeme, čili využijeme Heineho větu. Posloupnosti volíme $x_n := n$. Pak $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $x_n \neq \infty$. Funkci volíme:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\sqrt{x^3+3x^2}}$$

Když zjistíme limitu této funkce v ∞, tak budeme znát i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(n)$. Tedy do toho: rutinní postup

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\sqrt{x^3+3x^2}} = e^{\sqrt{x^3+3x^2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}$$

Opět rutinně: exponenciála je spojitá (všude:)) řešíme jen vnitřní funkci, pak dosadíme dle věty o limitě složené fce.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3+3x^2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3+3x^2}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)}{\frac{2}{x^2-1}}\cdot\frac{2}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)}{\frac{2}{x^2-1}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^3+3x^2}}{x^2-1} = 1\cdot 0$$

Celkem máme $e^0 = 1$.

A dle úvah pře výpočtem toto platí i pro limitu posloupnosti. Výsledek je 1.