9.cvičení

28.11.2009

Teorie

Věta 1 (Heineova.)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Limity:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Hinty:

1^∞ je nedefinovaný výraz

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$0 = 1 - 1$$

$$x = 1 + (x - 1)$$

Příklady

1.
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

2.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 3x}}{\ln(1 + x^2)}$$

3.
$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$$

4.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

5.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^a x - e^b x}{\sin ax - \sin bx}$$

6.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$$

7.
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \quad a>0$$

8.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$$

9.
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right)$$

10.
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

11.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

12.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$$