8.cvičení

19.11.2009

Příklady

1.
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5}{2x^2+1}$$

Řešení: tady není celkem co řešit, funkce je v okolí 3 spojitá, tak dosadíme:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5}{2x^2+1}=\frac{3^3-5}{2\cdot 3^2+1}=\frac{22}{19}$$

2.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení: Tady co řešit je, funkce je "0/0", takže vytkneme $(x-1)$ a pak viz výše:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$$

3.
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^3+x-1}$$

Řešení: Tento příklad je na zmatení:) V čitateli vychází sice nula, ale ve jmenovateli ne, funkce je opět spojitá, dosadíme.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^3+x-1}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2^3+2-1}=\frac{0}{10}$$

4.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$$

Řešení: Funkce je opět "0/0", čili podělíme výrazem $(x-1)$ (máme na to vzorec) a pak už je funkce spojitá atd.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}$$

5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}x+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

Řešení: Vzpomeneme si, co jsme si říkali o posloupnostech a uvědomíme si, že tady je spojité všechno, kam se podíváš (když tedy jdeme k nekonečnu) a můžeme zlomek bez obav roztrhnout (Věta o aritmetice limit, úvaha o roztrhnutí je dost důležitá, nevyjde nám neurčitý výraz, promyslet!)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}x+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2x+1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot 1}{\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}} + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{3x}}{\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}} + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \infty + 0 = \infty$$

Tento příklad je dosti ilustrativní, takže si promyslíme několik věcí. Jednak, to nekonečno, je kladné, protože ta limita operuje jen s kladnými čísly (když jsou větší než nula, což ale jsou, protože kráčíme ke kladnému nekonečnu). Za druhé, k nekonečnu jsme přičetli dvě reálná čísla. Důležité je, že jsou jenom dvě (konečně mnoho), že přičítáme (případně odčítáme, ale rozhodně nenásobíme) a že jsou reálná. Dále: nekonečna se nebojíme. Vždyť i některé pěkné funkce (x) jdou do nekonečna. Za třetí, používáme s výhodou to, co už známe z posloupností. Za čtvrté, použité věty: **VOAL a VOLSF**, aritmetiku limit používáme na každém rovnítku i při dosazení. Limitu složené funkce používáme, když dosazujeme pod odmocninu, do děláme s klidem proto, že odmocnina je spojitá (mimo nulu). V písemce nutno uvést úplně všude a navíc dopsat tyto podmínky!!!

6.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$$

Řešení: Nutno roznásobit (opět jako v posloupnostech):

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4-4x}{(\sqrt{x+13}+2\sqrt{1+x})(x^2-9)} =$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{1+x})} = \frac{-3}{(3+3)(\sqrt{16}+2\sqrt{4})} = \frac{-1}{16}$$

Opět jsme využili spojitosti. Povšimneme si, že zlomek byl zpočátku typ "0/0" a že po roznásobení se nám problémy požraly. Pokud se nepožerou, je dobré se zamyslet, není-li něco špatně (zejména numerické chyby jsou moc bezva).

7.
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}$$

Řešení: Opět roznásobíme, problémy se sežerou, funkce se zespojití, dosadíme… Je nutné umět dělit mnohočlenem.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)-2^3}{(x^3-8)(\sqrt[3]{x+6}+2\sqrt[3]{x+6}+2^2)}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt[3]{x+6}+2\sqrt[3]{x+6}+2^2)}=\frac{1}{(4+4+4)(4+2\cdot 2+4)}=\frac{1}{144}$$

8.
$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x],\quad a,b\in\mathbb{R}$$

Řešení: Sice to není zlomek, ale rádi bychom se zbavili odmocniny, pročež budeme opět rozšiřovat

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$
$$\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1}=\frac{a+b}{1+1}=\frac{a+b}{2}$$

V závěru jsme použili větu o aritmetice limit (kdepak asi) a VOLSF, u odmocniny, jak víme, ta je spojitá. Budeme si to pamatovat!

9.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$$

Řešení: Tady využijeme známé limity: $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$ a "substituce" $y=5x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}5=5$$

5 je konstanta, u té se dělá limita snadno, jinak jsme užili VOAL.

10.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

Řešení: Pro ilustraci si nakreslete obrázek. Jinak řešení spočívá ve dvou policajtech. $\sin x$ je omezený tedy

$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}\le\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\le\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Pokud nevěříte limitě $1/x$, dokažte si ji z definice, jelikož $\sin x$ je omezený na celém $\mathbb{R}$, není problém s okolím, které vyžadují policajti.

11.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

Řešení: Rozepíšeme a použijeme limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x} - 1)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-\cos x)}{x^2 \cos x \sin^2 x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

Použili jsme známé limity, úpravy zlomků a funkcí a hlavně VOAL, kde nám vpravo vyšel definovaný výraz, což je bezva. Promyslete si, proč

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1^2$$

12.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin x}$$

Řešení: Můžeme řešit pomocí součtových vzorců pro sinus, ale takhle to jde rychleji (alespoň těm, co si nepamatují vzorce):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x \sin 4x}{4x \sin x} - \frac{2x \sin 2x}{2x \sin x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{4x \sin 4x}{4x \sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin 2x}{2x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot x}{2x \sin x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} =$$
$$4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Stějn+ jako minule si promyslíme, proč užíváme VOAL a proč ty limity vypadají, jak vypadají.