

8.cvičení

19.11.2009

Teorie

Definice 1. Necht' $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad f(x) \in \mathcal{U}^\epsilon(A).$$

V takovém případě píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Definice 2. Necht' $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě a* , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Věta 3 (O aritmetice limit). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ Definitionován;
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB Definitionován;
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ Definitionován.

Věta 4 (O limitě a uspořádání). (a) Necht' $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad f(x) > g(x).$$

(b) Necht' existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad f(x) \leq g(x).$$

Necht' existují $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

(c) (dva policajti pro funkce) Necht' existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Necht'

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Pak existuje

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Věta 5 (O limitě složené funkce). Necht' $a \in \mathbb{R}^*$ a necht' funkce f a g splňují

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(P1) f je spojitá v A ;

(P2) $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

Příklady

Určete, zda následující řady konvergují.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5}{2x^2 + 1}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + x - 1}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{1 + x}}{x^2 - 9}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x + 6} - 2}{x^3 - 8}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{(x + a)(x + b)} - x], \quad a, b \in \mathbb{R}$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin x}$$