7.cvičení

12.11.2009

Příklady

Určete, zda (případně kdy) následující řady konvergují.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n} \quad z \in \mathbb{R}$$

Řešení: Nejprve případ, kdy $z \geq 0$. Z Leibnize řada konverguje právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n} = 0,$$

což je právě tehdy, když $z \in [0;1]$. Proč, to zjistíte pohledem na cvičení, týkající se posloupností.

Jestliže je $z < 0$, tak řada vypadá následovně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1 \cdot |z|)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(|z|)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n}$$

Tedy, pro $z = -1$ víme, že řada nekonverguje. Pro $z \leq -1$ tedy také ne, ze srovnávacího kritéria (prostě je to větší, než $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Zbývá $z \in (-1;0)$. Použijeme-li d'Alamberovo podílové kritérium, získáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1} \cdot n}{(n+1)|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z| \cdot n}{n+1} = |z| < 1,$$

tedy řada konverguje. Celkem tedy řada konverguje právě tehdy, když $z \in (-1;1]$.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

Řešení: Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$$

Řešení: Leibniz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty} \ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Zápis je symbolický, použijeme větu o omezené a mizející posloupnosti (jelikož $\sqrt[n]{n}$ má limitu, tak je omezená). Jinak věta o aritmetice limit:) Řada konverguje.

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \; k \geq 2, \; k \in \mathbb{Z}$$

Řešení: Užijeme Raabeovo kritérium, tedy počítáme limitu:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)^k}{n^k} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \frac{n^k + kn^{k-1} + \cdots + 1 - n^k}{n^k} = k \geq 2 > 1$$

tedy řada konverguje.

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Řešení: Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{4^n (n!)^2 (2n+3)!}{4^{n+1} (n+1)!^2 (2n+1)!} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{4} \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} - 1 \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} n \frac{4n^2 + 10n + 6 - 4n^2 - 8n - 4}{4(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n}{4n^2+8n+4} = \frac{1}{2} < 1,$$

tedy řada diverguje.

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$

Řešení: Leibniz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0$$

řada konverguje, užili jsme věty o aritmetice limit...

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{n}$$

Řešení: Raabe:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n+1}{n}\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3}{2}>1$$

tedy řada konverguje.

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n$$

Řešení: Nejprve nechť $z\geq 0$. Dle podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}z^{n+1}n^2}{(n+1)^2 2^n z^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2zn^2}{n^2+2n+1}=2z$$

tedy řada konverguje pro $z\in[0;1/2)$, diverguje pro $z>1/2$. Zbývá $z=1/2$, pak ale řada vypadá následovně: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, a to víme, že konverguje. Pro $z<0$ máme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2|z|)^n}{n^2}$, použijeme Leibnizovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2|z|)^n}{n^2}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z|\leq 1/2$$

Takže celkem řada konverguje právě pro $z\in[-1/2;1/2]$.