7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Poznámka 1. Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí) a navíc shora (zdola) omezená, pak má vlastní limitu. Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí) a navíc shora (zdola) neomezená, pak má limitu $+\infty$ $(-\infty)$.

Věta 2 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Fakt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti
   (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$
   (b)
   $$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$
   Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
   (c) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy
   $$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$
2. Spočtěte limity
   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$
   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$
   (c)
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

(g)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3-n}-an-b)=0$$

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n)$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty} (1+\sin n\pi)$$