5.cvičení

29.10.2009

Příklady

Určete, zda následující řady konvergují.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

   Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium. Jako srovnávací řadu použijeme $b_n := 1/n$ o níž víme, že diverguje. Tedy počítáme limitu

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1.$$

   Jelikož $1 \in (0, \infty)$, tak naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje zvolená b_n. Ta diverguje, čili i zadaná řada diverguje.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

   Řešení: Užijeme podílové kritérium.

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{22^n} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

   1/2¡1, tedy řada konverguje.

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

   Řešení: Jelikož řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak řada diverguje.

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$$

Řešení: Odmocninové kritérium, verze (a).

$$\left|\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right| \leq \frac{2}{3}$$

Tuto nerovnost ověřte! Našli jsme $q < 1$, které omezuje posloupnost a_n $\forall n$, tedy řada konverguje.

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

Řešení: Nejprve výraz upravíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5-n^2-1}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{4/3}}.$$

Jelikož jsme řadu omezili jinou a navíc konvergující řadou, tak zadaná řada taktéž konverguje.

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Řešení: Řadu odhadneme zdola pro $n \geq 3$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tedy i zadaná řada diverguje.