6.cvičení

5.11.2009

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka konvergence)**.** Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 2 (Linearita množiny konvergentních řad)**.** (a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n \quad \text{konverguje.}$$

(b) Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují. Pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Věta 3 (Srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 4 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s nezápornými členy. Nechť

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*.$$

(a) Jestliže $K \in (0, \infty)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje.}$$

(b) Jestliže $K = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje.}$$

(c)) Jestliže $K = \infty$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje.}$$

Věta 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists\, q \in (0,1) \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(b) jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(c) jestliže $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(d) jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a proto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;

(e) jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 6 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists\, q \in (0,1) \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(b) jestliže $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(c) jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

(d) jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklady

Určete, zda následující řady konvergují.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$