5.cvičení

29.10.2009

Teorie

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže platí:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \geq k$$

(resp.

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \leq k).$$

Věta 2. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje *Bolzano–Cauchyho podmínku*:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}\ m, n \geq n_0 :\ |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Věta 3. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy, splňující:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Věta 4. Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in R$ a mějme $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak také $\lim_{k\to\infty} = A$.

Příklady

Spočtěte následující limity

1.

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n\frac{\pi}{4})$$

Řešení: Najdeme vybrané podposloupnosti s různými limitami. Kupříkladu pro n dělitelná 8 získáme $\sin(2\pi) = 0$, zatímco pro n, která mají po dělení 8 zbytek 2 získáme $\sin(1/2\pi) = 1$. Takže máme 2 různé podposloupnosti s různými, dosti vzdálenými limitami. Stačí použít Větu o limitě vybrané posloupnosti. Jiný způsob je použít Bolzano–Cauchyho podmínku: zvolíme $\epsilon < 1$ a najdeme protipříkladová n_0 pomocí úvahy výše.

2.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

Řešení: Jednak když se podíváme na úlohu, můžeme zkusit odhadnout limitu. Odmocnina zmenšuje rozdíly, takže můžeme doufat, že rozdíl se bude zmenšovat a limita půjde k nule. A teď formálně - rozšíříme vhodným zlomkem tak, abychom se zbavili odmocnin:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \frac{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{n^{2/3}} \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0} + 1} = 0$$

Uvědomíme si, že jsme použili Větu o aritmetice limit.

3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme třetí větu a budeme zjišťovat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1} + 3^{n+1}}{n^2 + 2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + (\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{\frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}^n) + \frac{1}{3}} = \frac{0+0+1}{0+\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Řešení: Nejprve se soustředíme na sudé členy a zlomek rozšíříme:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

Pro liché členy spočítáme limitu úplně stejně, vyjde nám $-1/2$. Čili limita neexistuje.

5.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

Řešení: Použijeme trik:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

. Nyní aplikováno na limitu získáme:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ocásek sumy je maličký (jde k nule), a všechny členy kromě jedničky se sežerou... Tedy výsledek je roven 1.

6.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$$

Budeme pracovat se zlomkem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[6]{(n^3+1)^2}-\sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

Ten rozšíříme, aby nám zmizela šestá odmocnina. Měla by vyjít 0.

7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Použijeme opět trik:

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Když si nyní limitu rozepíšeme, začnou se nám závorky navzájem krátit s jmenovateli a zbyde nám 1/2 a malý zbytek. Tedy limita je rovna 1/2.

8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

Řešení: Řešíme na základě znalosti nerovnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

což jde k nule. Zespoda je limita také omezená, vše je kladné. Čili celkem je ronva 0.

9.

$$\lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$$

Řešení: Rozdělíme opět na sudé a liché členy:

$$\lim_{n\to\infty} 3(1+\frac{1}{n})+2=3+2=5$$

$$\lim_{n\to\infty} 3(1+\frac{1}{n})-2=3-2=1$$

Čili opět máme dvě různé limity, ale jedna posloupnost nemůže mít 2 limity. Tedy limita neexistuje.