# 5.cvičení

29.10.2009

## Teorie

**Definice 1.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže platí:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \geq k$$

(resp.

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \leq k).$$

**Věta 2.** Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje *Bolzano–Cauchyho podmínku*:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}\ m, n \geq n_0 :\ |a_m - a_n| < \epsilon.$$

**Věta 3.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy, splňující:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

**Věta 4.** Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in R$ a mějme $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak také $\lim_{k\to\infty} = A$.

## Příklady

Spočtěte následující limity

1.

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n\frac{\pi}{4})$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$$

7.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

9.

$$\lim_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$