4.cvičení

22.10.2009

Příklady:

1. z definice spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Řešení: chceme dokázat, že: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Jelikož $n > 0$, můžeme absolutní hodnotu přepsat na: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, což znamená, že potřebujeme zajistit, aby $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Tedy stačí zvolit $n_0 := [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$ (horní celá část), pak $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy pro $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ platí, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$$

Řešení: Užijeme opakovaně větu o aritmetice limit, promyslete si, kde přesně.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5})}{n^5(1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5})} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5})}{\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5})} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} - \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^5}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^5}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8}$$

Řešení: Opět věta o aritmetice limit, ale už to nebudeme rozepisovat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{5}{n} + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{8}{n^3}\right)} = \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0} = 0$$

4. z definice spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \log n$$

Řešení: Ze znalostí základních funkcí odhadneme, že limita bude asi ∞. Takže užijeme definici nevlastní limity:

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže platí:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \geq k$$

(resp.

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 :\ a_n \leq k).$$

Tedy zvolme $k \in \mathbb{R}$ a hledejme n_0, aby pro $\forall n \geq n_0$ byla $a_n \geq k$. Logaritmus je rostoucí záležitost, stačí tedy najít vhodné n_0, zbytek bude platit triviálně. Dosadíme-li n_0 do předpisu, získáme:

$$\ln n_0 \geq k.$$

Vypustíme na to exponencielu, která je taktéž rostoucí funkcí, tedy nezmění znaménko nerovnosti:

$$n_0 \geq e^k.$$

Nyní už jsme hotovi, stačí volit $n_0 := [e^k]+1$ a z předchozích úvah plyne vše potřebné.

5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot \frac{1}{n} = 0.$$

Jedničky jsou posloupnost omezená, $1/n$ je posloupnost mizející, takže dle věty pro mizející a omezenou posloupnost a dle věty o dvou policajtech (vše je větší než 0) máme, že limita $= 0$.

6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$$

Řešení: Věta o aritmetice limit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\left(\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!}\right)}{n!\left(1 + \frac{n^6}{n!}\right)} = \frac{0+0}{1+0}$$

Jednotlivé limity se dopočítají snadno, stačí si rozepsat jednotlivé členy, případně je pronásobit a získáme už nějakou známou limitu (podíl polynomů nebo omezenou a mizející posloupnosti).

7.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot \sin(n!)}{n+1}$$

Řešení: Funkce sinus je omezená, tedy:

$$0 = \lim_{n\to\infty} (-1)\cdot \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot \sin(n!)}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$$

8.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}, \quad \text{kde} |a|, |b| < 1$$

Řešení: Stačí si uvědomit, jaký je součet geometrické řady a věta o aritmetice limit. . . : $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Limita vyjde: $\frac{1-b}{1-a}$

9.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$$

Řešení: Roznásobíme závorky podle binomické věty a nebudeme se zbytečně trápit s malými mocninami:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{100} + 100\cdot 4n^{99} + \cdots)(n^{100} + 100\cdot 3n^{99} + \cdots)}{(n^{100} + 100\cdot 2n^{99} + \cdots) - n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{99}(\cdots)}{2n^{99}(\cdots)} = \frac{1}{2}$$

10.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Řešení: Odhadneme, že limita je =1 a dokážeme z definice sporem. Nechť tedy $\exists\epsilon\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |\sqrt[n]{n} - 1| \geq \epsilon$. Tedy máme pevné epsilon, zvolíme si n_0 (z definice to platí pro každé...) a díváme se, co to udělá s $n \geq n_0$. Absolutní hodnotu můžeme zahodit a máme:

$$\sqrt[n]{n} - 1 \geq \epsilon,$$

tedy

$$\sqrt[n]{n} \geq \epsilon + 1$$

a

$$n \geq (\epsilon + 1)^n.$$

BÚNO $n \geq 2$, pak dle binomické věty rozepíšeme

$$(\epsilon+1)^n = 1 + n\epsilon + \binom{n}{2}\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^n$$

Tedy

$$n \geq (\epsilon+1)^n \geq \binom{n}{2}\epsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2.$$

Pak ale

$$n \geq n(n-1)\frac{\epsilon^2}{2},$$

$$1 \geq (n-1)\frac{\epsilon^2}{2},$$

$$\frac{2}{\epsilon^2} + 1 \geq n,$$

což už je spor.

Našli jsme totiž epsilon z definice (fixované epsilon) a s tím jsme pracovali. Když teď zvolíme $n_0 > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$, tak pro $n \geq n_0$, už podmínku z definice nikdy nesplníme.